

# TESIS DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

## DESARROLLO DE UNA ESTRATEGIA DE TRANSFERENCIA DE ÓRBITA PARA UN SATÉLITE GEOESTACIONARIO CON PROPULSIÓN ELÉCTRICA

**Ing. Julián Nicolás GARCÍA HAHN**

**Ing. José M. Relloso**  
Director

**Ing. Andrés Laudari**  
Co-director

### **Miembros del Jurado**

Dra. Pedre, Sol (Centro Atómico Bariloche)  
Dr. Colavecchia, Flavio (Centro Atómico Bariloche)  
Ing. José Francisco Argibay Tome (INVAP)

19 de Diciembre de 2018

Grupo de Navegación, Guiado y Control – INVAP

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



# Agradecimientos

A mi esposa, Eugenia, el vínculo más lindo logrado durante el desarrollo de este trabajo. Por su paciencia interminable y sus infalibles consejos.

A el eterno apoyo de mis padres: Gladys y Julio.

A Graciela Bertolino por sus consejos académicos y su guía dentro de la Institución.

A mis amigos que siempre desearon lo mejor para mí.





# Índice de contenidos

Agradecimientos	iii
Índice de contenidos	v
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos del Trabajo . . . . .	2
1.3. Mecánica Orbital . . . . .	3
1.3.1. Problema de Dos Cuerpos . . . . .	4
1.3.2. Momento . . . . .	6
1.3.3. Ecuación de Movimiento General de una Órbita Kepleriana . . .	9
1.3.4. Breve Análisis de la Ecuación de Órbitas Keplerianas y Otras Relaciones Importantes . . . . .	15
1.3.5. Anomalías y Ecuación del Tiempo de <i>Kepler</i> . . . . .	17
1.3.6. Tridimensionalización del Plano Orbital . . . . .	21
1.3.7. Órbitas no Keplerianas . . . . .	24
1.3.8. Sistemas de Coordenadas . . . . .	25
1.3.9. Utilización de Propelente . . . . .	29
1.3.10. Órbitas Estándar . . . . .	29
<b>2. Desarrollo del Software</b>	<b>33</b>
2.1. Método de Propagación . . . . .	33
2.1.1. Método de Promediado Orbital . . . . .	34
2.1.2. Perturbaciones Incluidas . . . . .	35

2.1.2.1.	Sombra Terrestre . . . . .	35
2.1.2.2.	J2; Achatamiento de la Tierra . . . . .	36
2.1.3.	Método de Integración . . . . .	36
2.1.3.1.	Mallado . . . . .	36
2.1.3.2.	Integración . . . . .	37
2.1.4.	Propagación . . . . .	38
2.1.5.	Definición de Variables . . . . .	39
2.2.	Arquitectura del Software . . . . .	40
2.2.1.	Estructura General . . . . .	40
2.2.2.	CUSOI - Núcleo de Integración . . . . .	40
2.2.2.1.	Configuración de Opciones . . . . .	41
2.2.2.2.	Integración . . . . .	42
2.2.2.3.	Guardado de Datos . . . . .	42
2.2.2.4.	Formato de Estrategias . . . . .	44
2.2.3.	GUI - Herramienta de Análisis . . . . .	45
<b>3.</b>	<b>Pruebas de Validación</b>	<b>49</b>
3.1.	Validación en 2D; Gopinath [1] . . . . .	49
3.2.	Validación en 3D; Programa Comercial . . . . .	52
3.3.	Validación en 3D; Pollard [2] . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>Optimización y Análisis de Casos</b>	<b>61</b>
4.1.	Parametrización . . . . .	61
4.2.	Descripción de Misión . . . . .	67
4.3.	Optimización . . . . .	68
4.4.	Caso 1: De LEO a GEO en Tiempo Mínimo . . . . .	70
4.4.1.	Misión . . . . .	70
4.4.2.	Optimización y Resultados . . . . .	70
4.4.3.	Análisis de Resultados . . . . .	72
4.4.4.	Comparación con Resultados Bibliográficos . . . . .	74
4.5.	Caso 2: De LEO a GEO en Propelente Mínimo . . . . .	76
4.5.1.	Misión . . . . .	76
4.5.2.	Optimización y Resultados . . . . .	76
4.5.3.	Análisis de Resultados . . . . .	77
4.5.4.	Comparación con Resultados Bibliográficos . . . . .	79
4.6.	Caso 3: De GTO a GEO . . . . .	80
4.6.1.	Misión . . . . .	80
4.6.2.	Optimización y Resultados . . . . .	81
4.6.3.	Análisis de Resultados . . . . .	81

---

4.6.4. Comparación con Resultados Bibliográficos . . . . .	84
4.7. Caso 4: Mejora de Caso 3; Mejores Condiciones Iniciales . . . . .	85
4.7.1. Misión . . . . .	85
4.7.2. Optimización y Resultados . . . . .	85
4.7.3. Análisis de Resultados . . . . .	86
4.7.4. Comparación con Resultados Bibliográficos . . . . .	88
4.8. Caso 5: De GTO a GEO; Tiempo Mínimo en Cinturón de Van Allen . .	88
4.8.1. Misión . . . . .	88
4.8.2. Optimización y Resultados . . . . .	89
4.8.3. Análisis de Resultados . . . . .	90
4.9. Caso 6: De Súper GTO ( $200 \times 60000Km$ ) a GEO . . . . .	93
4.9.1. Misión . . . . .	93
4.9.2. Optimización y Resultados . . . . .	93
4.9.3. Análisis de Resultados . . . . .	94
4.10. Caso 7: De Súper GTO ( $200 \times 90000Km$ ) a GEO . . . . .	97
4.10.1. Misión . . . . .	97
4.10.2. Optimización y Resultados . . . . .	97
4.10.3. Análisis de Resultados . . . . .	98
4.11. Comparación Final . . . . .	100
<b>5. Trabajo Futuro Sugerido</b>	<b>103</b>
5.1. Software . . . . .	103
5.2. Optimización . . . . .	103
<b>6. Conclusiones</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>



# Índice de figuras

1.1. Problema de dos cuerpos. . . . .	5
1.2. Fuerza $\vec{F}$ en un cuerpo $m$ . . . . .	7
1.3. Velocidad tangencial $v_v$ . . . . .	8
1.4. Área diferencial . . . . .	9
1.5. Deducción de ecuaciones polares . . . . .	9
1.6. Parámetros planares de una órbita Kepleriana . . . . .	15
1.7. Parámetros geométricos de una órbita Kepleriana planar . . . . .	17
1.8. Anomalía excéntrica y verdadera . . . . .	18
1.9. Deducción de la ecuación del tiempo de Kepler . . . . .	20
1.10. Vector vernal . . . . .	22
1.11. Sistema de coordenadas ECI . . . . .	23
1.12. Parámetros orbitales clásicos $i$ , $\Omega$ y $\omega$ en ECI . . . . .	23
1.13. Sistema de coordenadas $\mathcal{RSW}$ . . . . .	27
1.14. Sistema de coordenadas $\mathcal{NTH}$ . . . . .	27
1.15. Ángulo de Ataque $\varphi$ . . . . .	29
1.16. Órbitas estándares . . . . .	30
2.1. Mallado espacial y temporal . . . . .	37
2.2. Esquema de método trapezoidal de integración . . . . .	38
2.3. Convención de variables . . . . .	39
2.4. Arquitectura general del software . . . . .	41
2.5. Diagrama de flujo de la función de integración . . . . .	43
2.6. Ejemplo de escritura de estrategia . . . . .	45
2.7. Interfaz Gráfica . . . . .	46
2.8. Resultados en interfaz gráfica . . . . .	46
2.9. Diagrama de flujo del lazo de integración . . . . .	47
3.1. Validación de evolución de parámetros orbitales contra Gopinath . . . . .	51
3.2. Validación del efecto del arco de propulsión contra Gopinath . . . . .	52
3.3. Validación de evolución de parámetros orbitales $a$ y $e$ para Pollard . . . . .	58
3.4. Validación de evolución de parámetros orbitales $i$ y $\Omega$ , $\omega$ para Pollard . . . . .	59

4.1. Ángulo de propulsión $\beta$ . . . . .	65
4.2. Análisis de co-estados $\lambda_a a$ y $\lambda_e$ . . . . .	66
4.3. Ejemplo de co-estados . . . . .	68
4.4. Nodos de optimización. Caso 1 . . . . .	71
4.5. Curvas de evolución. Caso 1 . . . . .	72
4.6. Caso 1. Día 118 . . . . .	73
4.7. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 1 . . . . .	74
4.8. Comparación Bibliográfica. Caso 1 . . . . .	75
4.9. Nodos de optimización. Caso 2 . . . . .	77
4.10. Curvas de evolución. Caso 2 . . . . .	78
4.11. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 2 . . . . .	79
4.12. Diferencias en evolución. Caso 1 VS Caso 2 . . . . .	79
4.13. Nodos de optimización. Caso 3 . . . . .	81
4.14. Curvas de evolución. Caso 3 . . . . .	82
4.15. Caso 3. Día 55 . . . . .	83
4.16. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 3 . . . . .	83
4.17. Comparación bibliográfica. Caso 3 . . . . .	84
4.18. Nodos de optimización. Caso 4 . . . . .	86
4.19. Cuvas de evolución. Caso 4 . . . . .	87
4.20. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 4 . . . . .	88
4.21. Nodos de optimización. Caso 5 . . . . .	90
4.22. Curvas de evolución. Caso 5 . . . . .	91
4.23. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 5 . . . . .	92
4.24. Caso 5. Día 61 . . . . .	92
4.25. Nodos de optimización. Caso 6 . . . . .	94
4.26. Curvas de evolución. Caso 6 . . . . .	95
4.27. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 6 . . . . .	96
4.28. Caso 6. Día 16 . . . . .	96
4.29. Nodos de optimización. Caso 7 . . . . .	98
4.30. Curvas de evolución. Caso 7 . . . . .	99
4.31. Evolución de perigeo y apogeo. Caso 7 . . . . .	100
4.32. Compración de costos . . . . .	101

# Índice de tablas

3.1. Validación contra STK. Caso 1 . . . . .	53
3.2. Validación contra STK. Caso 2 . . . . .	55
4.1. Ejemplo de Tabla de Misión . . . . .	67
4.2. Tabla de Misión de caso 1. . . . .	70
4.3. Resultados relevantes de la optimización del caso 1 . . . . .	71
4.4. Comparación bibliográfica. Caso 1 . . . . .	75
4.5. Tabla de misión. Caso 2 . . . . .	76
4.6. Resultados relevantes de la optimización del caso 2 . . . . .	77
4.7. Comparación bibliográfica. Caso 2 . . . . .	80
4.8. Tabla de Misión. Caso 3 . . . . .	80
4.9. Resultados relevantes de la optimización del caso 3 . . . . .	81
4.10. Comparación bibliográfica. Caso 3 . . . . .	84
4.11. Tabla de Misión. Caso 4 . . . . .	85
4.12. Resultados reelevantes de la optimización del caso 4 . . . . .	86
4.13. Comparación bibliográfica. Caso 4 . . . . .	88
4.14. Resultados relevantes de la optimización del caso 5 . . . . .	89
4.15. Comparación de tiempo en Van Allen. Caso 3 VS caso 5 . . . . .	91
4.16. Tabla de Misión. Caso 6 . . . . .	93
4.17. Resultados relevantes de la optimización del caso 6 . . . . .	94
4.18. Comparación de tiempos Van Allen. Caso 3 VS caso 6 . . . . .	95
4.19. Tabla de misión. Caso 7 . . . . .	97
4.20. Resultados relevantes de la optimización del caso 7 . . . . .	98
4.21. Comparación de tiempo en Van Allen. Caso 3 VS caso 7 . . . . .	100
4.22. Comparación final de costos . . . . .	101





# Resumen

En los últimos años los propulsores eléctricos han desplazado a los propulsores químicos como medio de propulsión en la industria satelital. La principal ventaja de este tipo de tecnología son las reducciones en masa de propelente que implica la aplicación de la misma. Al comienzo, los propulsores eléctricos se utilizaban únicamente para las tareas de mantenimiento orbital, ya que los bajos impulsos de los estos son ideales para este tipo de tarea. Últimamente, se han comenzado a utilizar propulsores eléctricos para misiones de transferencia orbital, lo cual implica aún más ahorro en propelente. Sin embargo, la implementación de propulsión eléctrica en misiones de transferencia trae consigo nuevos desafíos a resolver. Estos desafíos abarcan diversas áreas de la Ingeniería.

Este trabajo se centra en el cálculo y optimización de misiones de transferencia con propulsión eléctrica. Al no existir métodos analíticos directos, es necesario elaborar herramientas numéricas que nos permitan resolver este tipo de problemas. Es por esto, que en este trabajo se desarrolla una herramienta de propagación de órbitas orientada al análisis y optimización de las mismas, la cual denominamos “**CUSOI**”. Una vez desarrollada la herramienta numérica, la misma se valida y se utiliza para la optimización de transferencias.

Las optimizaciones se centran en reducir los costos de las misiones. Estos costos pueden definirse en tiempo total de la transferencia, masa de propelente utilizado y/o tiempo de permanencia del satélite en el cinturón de Van Allen, una zona de alta radiación ionizante que recubre la tierra. Una vez realizadas las optimizaciones con CUSOI, se realiza un análisis de las ventajas y desventajas de los distintos tipos de órbitas iniciales, condiciones de lanzamiento y estrategias de propulsión. Además, se analizan y comparan los costos en tiempo, masa de propelente y tiempo de estadía en el cinturón de Van Allen para las distintas estrategias encontradas producto de la optimización.

**Palabras clave:** DINÁMICA ORBITAL, TRANSFERENCIA ORBITAL, PROPULSIÓN ELÉCTRICA, OPTIMIZACIÓN, CÁLCULO NUMÉRICO, C++, PYTHON, CUDA



# Abstract

In the last few years, electric propulsion has replaced chemical propulsion in satellital industry. This has happened as a consequence of the reduction in mass propellant needed by electric thrusters in comparison to chemical ones. At its beginnings, electric thrusters were only used for station keep maneuvering. The low thrust of this kind of thrusters were ideal for these tasks. Lately, electric thrusters have been used for orbital transfer maneuvers, which implies even more propellant mass reduction. Nonetheless, the use of this technology brings a new set of challenges for different engineering areas.

This work focuses on the computation and optimization of orbit transfers with electric propulsion. Because there is no direct analytical solution to this problem, it is necessary to take a numerical approach. This leded the development of a tool which will be called “**CUSOI**”. It was then validated and applied to transfer optimization.

Optimizations are focused on mission costs reduction. These costs are defined in terms of total transfer time, mass of propellant used and/or the total time that the satellite stays in the Van Allen belt. This belt is a high ionizing radiation zone that covers the Earth. After the optimizations are solved, an analysis of advantages and disadvantages of different type of initial orbits, launch conditions and propulsion strategies is carried on. In addition, the costs in total time, propellant mass and Van Allen time of the optimization’s solutions are compared and analysed.

**Keywords:** ORBITAL DYNAMICS, ORBITAL TRANSFER, ELECTRIC PROPULSION, OPTIMIZATION, NUMERICAL COMPUTATION, C++, PYTHON, CUDA



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Es útil antes de comenzar cualquier desarrollo o investigación ahondar en las motivaciones que impulsan al mismo; sean estas curiosidad, interés económico, interés estratégico, etc.. Es por esto, que vamos a describir brevemente y de manera cualitativa el significado de una transferencia orbital y las variables que la rigen: restricciones, costos, tiempo de vuelo y zonas atravesadas, entre otros.

Una **transferencia orbital** es el proceso mediante el cuál se *transfiere* un objeto orbitante de un tipo de órbita inicial a otro tipo de órbita final. Se distinguen las transferencias de las tareas de mantenimiento de órbita, en que estas últimas se ejecutan con el fin de mantener un satélite, dentro de cierto margen de error, en las condiciones ideales para cierto tipo de órbita, mientras que las primeras intentan cambiarlo. Cuando se habla de objetos orbitantes podría hablarse de satélites artificiales, naves espaciales u otros objetos de interés hechos por el hombre, como la estación espacial internacional. Este trabajo se encuentra orientado a la transferencia del primero de estos objetos: satélites artificiales. De aquí en adelante se hablará únicamente de satélites como objetos orbitantes.

Las transferencias orbitales son llevadas a cabo por los satélites. Con dicho fin, los mismos tienen equipados propulsores capaces de generar fuerzas que aprovecharán para realizar la transferencia. Entre otras clasificaciones, los propulsores pueden dividirse en dos tipos: químicos y eléctricos. Los primeros son capaces de generar fuerzas impulsivas de corta duración y empuje más alto que los segundos. La matemática para resolver transferencias con este tipo de propulsores ya se encuentra resuelta en casi todos los libros de mecánica orbital y dinámica satelital hace un largo tiempo. El segundo tipo de propulsores, los propulsores eléctricos, generan fuerzas impulsivas muy bajas (del orden de los *mili-Newton*) y se fabrican preparados para propulsar por períodos muy largos de tiempo. La ventaja de estos últimos reside en la capacidad de aprovechar el

propelente que se utiliza para impulsar. Un satélite geoestacionario típico propulsado a propelente químico necesitará aproximadamente la mitad de su peso en propelente para toda su vida útil, esto es, transferencia más tareas de mantenimiento. Un satélite con propulsores eléctricos, en cambio, puede reducir esta necesidad de propelente entre 2 a 4 veces. Es importante mencionar los altos costos de colocar satélites en órbita. Al día en que se escribe el presente trabajo, se estima de manera aproximativa que subir 1 Kg de masa en órbita cuesta alrededor de US\$ 20.000. Es por esto que la opción de utilizar propulsores eléctricos, que permiten reducir la masa de propelente necesitada de manera significativa, resulta llamativa. La reducción de masa en propelente podría abaratar los costos de la misión o permitir elevar más carga útil por el mismo precio de elevación. Esto enfatiza la importancia de poder resolver estrategias de transferencia para satélites de propulsión eléctrica. El precio a pagar es la lentitud con la que las transferencias eléctricas se realizan. Para un satélite eléctrico, una transferencia dura un tiempo del orden de meses, cuando para uno químico, las transferencias duran el orden de días. Además, las ecuaciones que resuelven las transferencias para un satélite eléctrico no se pueden resolver de manera directa. Esto, lleva a buscar *estrategias* de transferencia a través de otro tipo de técnicas, como lo es la optimización.

Una **estrategia de transferencia** ó **programa de transferencia** ó **plan de transferencia**, es una serie de ordenes de propulsión a seguir expresados en forma de una ecuación, una tabla de datos o una parametrización, con el objetivo de llevar a cabo una transferencia orbital. También es usual llamar a la transferencia orbital **misión de transferencia**, ya que usualmente existen ciertos requerimientos finales a cumplir a partir de ciertas condiciones iniciales, lo que puede describirse como una misión.

Sin embargo, debido a que la transferencia orbital en un satélite eléctrico se realiza de manera muy progresiva, ciertas problemáticas cobran más importancia que cuando se los transfiere de manera impulsiva. Una de estas problemáticas, relevante para el análisis de este trabajo, es la cantidad de tiempo que el satélite pasa en la zona peligrosa del cinturón de Van Allen. El cinturón de Van Allen, es un cinturón de radiación ionizante que rodea la tierra y podría ser dañino para los equipos instalados en el satélite. Es por esto, que aparte de minimizar los tiempos de transferencia o la masa utilizada, en ocasiones será importante minimizar el tiempo que un satélite pasa en esta zona de peligro.

## 1.2. Objetivos del Trabajo

En el presente trabajo se pretende realizar optimizaciones de transferencias orbitales para encontrar las estrategias de transferencia óptimas para ciertos requerimientos. Como parte del trabajo, es necesario desarrollar un propagador de órbitas de alta

velocidad que permita ejecutar algoritmos de optimización sin tiempos de cómputo demasiado elevados. Es importante destacar que las estrategias de transferencia que resulten de esta optimización, servirán como guías para planear misiones de transferencia y no serán los resultados últimos utilizados para realizar la misión en sí. Esto promueve la importancia del desarrollo de un propagador de alta velocidad que permita probar y optimizar distintas estrategias en tiempos razonables.

### 1.3. Mecánica Orbital

Antes de comenzar a plantear optimizaciones o de describir el desarrollo del propagador creado para este trabajo, es necesario estudiar algunos conceptos útiles de mecánica orbital.

La mecánica orbital es la mecánica celeste aplicada al movimiento de satélites. Newton y Kepler sentaron las bases para el estudio de estos movimientos enunciando algunas leyes básicas. Kepler enunció tres leyes empíricas a partir de las observaciones que realizó:

- Las órbitas de los cuerpos celestes son elipses con el sol como uno de los focos de la elipse,
- El vector radial entre un cuerpo celeste y otro que lo orbita barre áreas iguales en tiempos iguales,
- El período de revolución de un cuerpo celeste orbitante es proporcional a la distancia media al sol elevado a  $3/2$ .

Newton, por su parte, enunció sus famosas tres leyes de la mecánica de los cuerpos y una referida a la atracción gravitatoria.

- Toda partícula que se encuentra en estado de reposo o de movimiento uniforme, mantendrá esta condición a menos que una fuerza externa la perturbe,
- La velocidad de cambio del momento lineal de un cuerpo de masa  $m$ , es igual a la fuerza  $\vec{F}$  aplicada en el cuerpo. Siendo  $\vec{p} = m\vec{v}$  el momento lineal de un cuerpo, donde  $\vec{v}$  es el vector velocidad:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1.3.1)$$

- Para toda fuerza  $\vec{F}_{ij}$  ejercida por un cuerpo  $i$  en un cuerpo  $j$ , debe existir una fuerza  $\vec{F}_{ji}$  ejercida por el cuerpo  $j$  en el cuerpo  $i$  de igual magnitud y sentido contrario. Esto se expresa:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (1.3.2)$$

- Dos cuerpos con masa  $m_i$  y  $m_j$  se atraen con una fuerza dada por la expresión:

$$\vec{F} = \frac{Gm_i m_j \vec{r}}{r^3} \quad (1.3.3)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de módulo  $r$  que conecta los cuerpos  $m_i$  y  $m_2$  y  $G$  es la constante gravitacional de valor:  $6,669 \times 10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2$

Gran parte del análisis de mecánica orbital se basa en las leyes enunciadas previamente.

### 1.3.1. Problema de Dos Cuerpos

El problema de dos cuerpos es un problema idealizado que permite desarrollar los primeros resultados analíticos de la mecánica orbital. Dicho problema, plantea una situación ideal donde dos cuerpos aislados en el espacio interactúan entre sí únicamente bajo la influencia de la ley gravitacional, ecuación 1.3. En esta situación idealizada, se descartan las fuerzas externas. En la figura 1.1, el cuerpo de masa  $m_2$  ejerce una fuerza  $\vec{F}_1$  de atracción sobre el cuerpo de masa  $m_1$  igual a  $\vec{F}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1$ , donde  $\ddot{\vec{r}}_i$  representa la aceleración del vector  $\vec{r}_i$  para cualquier  $i$ . De manera contraria el cuerpo 1 ejerce una fuerza en el cuerpo 2 igual a  $\vec{F}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_2$ .

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \\ \vec{F}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}_1 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

donde:

$$r^3 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3 \quad \text{y,} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.3.5)$$

Utilizando las ecuaciones 1.3.4 se puede encontrar  $\ddot{\vec{r}}$  como:

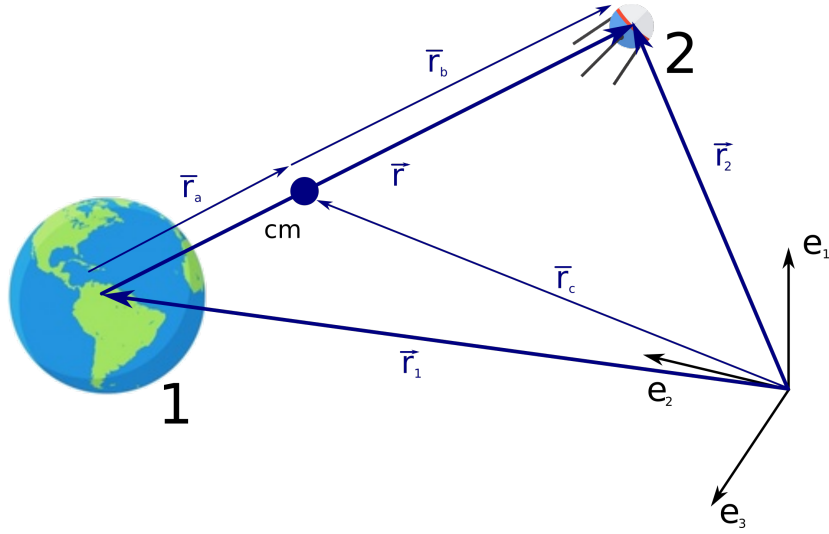
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G}{r^3} \vec{r} (m_1 + m_2) \quad (1.3.6)$$

Reacomodando términos:

$$\ddot{\vec{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (1.3.7)$$

La ecuación 1.3.7 es la ecuación básica de movimiento para el problema de dos cuerpos. Una vez deducida esta ecuación, se discutirán algunos conceptos a continuación, que ayudarán a avanzar en el análisis. En la figura 1.1 se puede observar un punto





**Figura 1.1:** representación del problema de dos cuerpos 1 y 2 con masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Estos cuerpos se ubican en las posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respecto a algún sistema de coordenadas genérico. En  $\vec{r}_c$  se encuentra el centro de masas de estos dos cuerpos.

etiquetado con el nombre “ $cm$ ”. Este punto es el llamado centro de masas y su posición se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$\sum_j^N m_j \vec{r}_j = 0 \quad (1.3.8)$$

donde  $j$  indica cada cuerpo,  $N$  es el número total de cuerpos,  $m_j$  es la masa del cuerpo  $j$  y  $\vec{r}_j$  es el vector que señala la ubicación del centro de masa respecto del cuerpo  $j$ . Para este caso en particular esta expresión puede escribirse como:

$$m_1 \vec{r}_a - m_2 \vec{r}_b = 0 \quad (1.3.9)$$

Así, observando la figura,  $\vec{r}_c$  se puede expresar como la suma de los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_a$ , o la resta de los vectores  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_b$ . De esta manera se puede expresar a  $\vec{r}_c$  de alguna de las siguientes maneras:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_1 + \vec{r}_a = \vec{r}_2 - \vec{r}_b \quad (1.3.10)$$

Si se despeja  $\vec{r}_a$  y  $\vec{r}_b$  de la ecuación 1.3.10 y se reemplaza las expresiones  $\vec{r}_a = \vec{r}_c - \vec{r}_1$  y  $\vec{r}_b = \vec{r}_2 - \vec{r}_c$  en la ecuación 1.3.9, al despejar  $\vec{r}_c$  se obtiene:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.3.11)$$

Diferenciando dos veces respecto del tiempo se obtiene:

$$\ddot{\vec{r}}_c = \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.3.12)$$

Si se reemplazan las variables  $\ddot{\vec{r}}_1$  y  $\ddot{\vec{r}}_2$  de la ecuación 1.3.4 se encuentra que:

$$\ddot{\vec{r}}_c = 0; \quad \text{por lo tanto} \quad \dot{\vec{r}}_c = cte. \quad (1.3.13)$$

De la ecuación 1.3.13 se puede deducir que si bien el centro de masa del sistema no está acelerado, el mismo puede estar en movimiento rectilíneo uniforme. Ahora, si se despeja  $\vec{r}_a$  y  $\vec{r}_b$  de la ecuación 1.3.10 y se reemplaza en estas expresiones  $\vec{r}_c$  por la expresión de la ecuación 1.3.11, al diferenciar dos veces por el tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_a &= \ddot{\vec{r}} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \ddot{\vec{r}}_b &= \ddot{\vec{r}} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Debido a que en el área que nos compete el objeto orbitante, satélite, tiene una masa despreciable frente al objeto orbitado, tierra, es útil plantear las ecuaciones considerando un objeto mucho más masivo que el otro. Por ejemplo, si  $m_1 \gg m_2$ , entonces:

$$\ddot{\vec{r}}_a = 0 \quad (1.3.15)$$

Y,

$$\ddot{\vec{r}}_b = \ddot{\vec{r}} \quad (1.3.16)$$

Implica que el cuerpo masivo no se ve influenciado por la presencia del cuerpo menor y que las aceleraciones resultantes de la interacción entre los cuerpos sólo afectan al menor de ellos. Gracias a esto podemos considerar al cuerpo masivo (usualmente la tierra) como inercial a nuestro sistema de coordenadas.

### 1.3.2. Momento

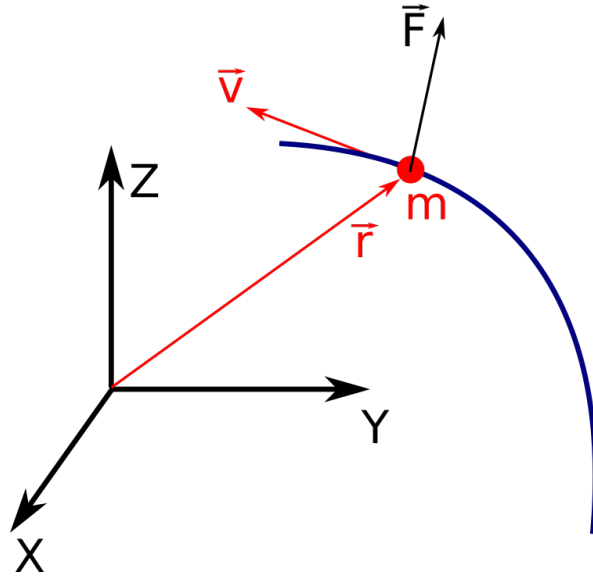
Ayudándose de la figura 1.2, se puede definir el momento de una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en un cuerpo de masa  $m$  como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.3.17)$$

Para este análisis también es útil definir el *momento del momento* o *momento angular* de un cuerpo que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  como:

$$\vec{h} = m (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (1.3.18)$$

Como  $\vec{p} = m\vec{v}$ :



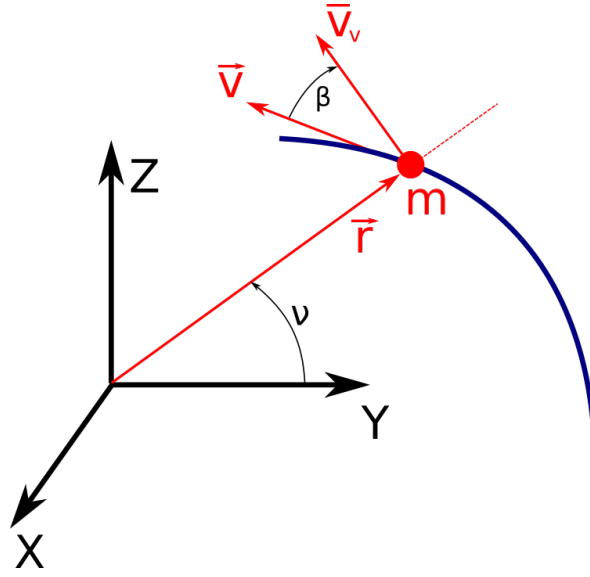
**Figura 1.2:** figura esquemática mostrando una fuerza  $\vec{F}$  aplicada en un cuerpo de masa  $m$  en una dirección arbitraria. La el cuerpo se encuentra en en la posición  $\vec{r}$  según algun sistema de referencia, moviéndose a una velocidad  $\vec{v}$ .

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.3.19)$$

Si continuamos con este análisis:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} &= \frac{d[\vec{r} \times m\vec{v}]}{dt} \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \overbrace{\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}}^0 + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \\ \frac{d\vec{h}}{dt} &= \vec{r} \times \vec{F} \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

De este último análisis, es importante notar que la velocidad de cambio del momento angular de un dado cuerpo, es igual al momento aplicado en el mismo. Como la aceleración en un sistema sólo regido por las fuerzas gravitatorias es siempre en dirección radial, el cambio de momento angular es nulo en ausencia de perturbaciones debido a que  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ . El momento angular  $\vec{h}$  es llamado *momento angular específico* y es perpendicular al vector de posición  $\vec{r}$  y a la dirección de la velocidad  $\vec{v}$ , y a su vez, es constante en el espacio. El hecho de que el momento angular sea constante en el espacio indica que el movimiento del cuerpo toma lugar en un plano, por ende, una órbita sin fuerzas externas queda limitada a un plano.



**Figura 1.3:** aquí se puede observar la proyección del vector velocidad  $\vec{v}$  en la componente perpendicular al eje radial:  $v_v$ . Ésta, puede expresarse como  $v_v = |\vec{v}| \cdot \cos(\beta)$ .

Observando la figura 1.3 se puede definir  $v_v = |\vec{v}| \cdot \cos(\beta)$ . A partir de esta definición se puede expresar el momento angular como:

$$\frac{h}{m} = |\vec{r} \times \vec{v}| = r v_v \quad (1.3.21)$$

La velocidad perpendicular al vector radial se puede calcular como  $v_v = r\omega$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular del cuerpo respecto del sistema de coordenadas y  $r$  es el módulo del vector  $\vec{r}$ . Así:

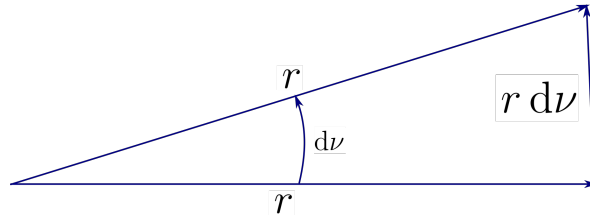
$$r v_v = r \cdot r \cdot \omega = r^2 \frac{d\nu}{dt} \quad (1.3.22)$$

ya que  $\omega = \frac{d\nu}{dt}$ . Mientras no existan fuerzas en direcciones no-radiales la tasa de cambio del momento angular será nula.

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = 0; \quad \vec{h} = \text{cte.} \quad (1.3.23)$$

Cabe destacar que, siendo  $r$  la longitud del vector entre los dos cuerpos y  $\nu$  el arco de ángulo entre dos instantes de tiempo, el área barrida por dicho vector en un instante de tiempo infinitesimal  $dt$  (2da ley del movimiento de Kepler) es igual al área de un triángulo de base  $r$  y altura  $r d\nu$  (figura 1.4):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \overbrace{\frac{d\nu}{dt}}^h \quad (1.3.24)$$



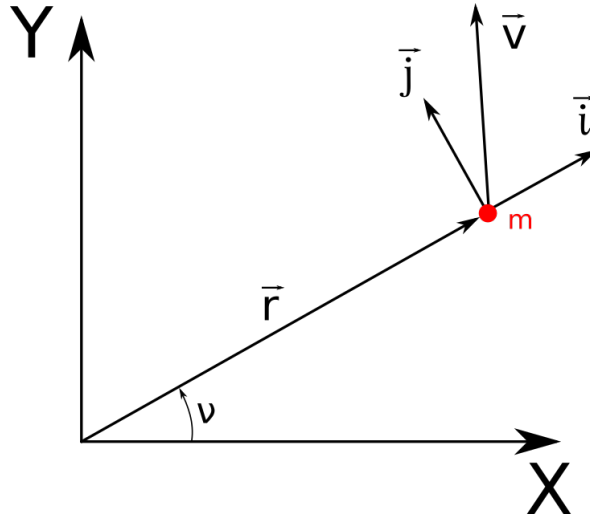
**Figura 1.4:** triángulo diferencial que se forma cuando un cuerpo en la posición  $\vec{r}$  se desplaza un ángulo  $d\nu$  alrededor de algún sistema de coordenadas genérico.

Como  $\vec{h}$  se mantiene constante en ausencia de fuerzas no-radiales, una órbita con estas características forma un vector cuerpo-a-cuerpo que barre áreas iguales en tiempos iguales.

A una órbita sin perturbaciones externas, en la cuál el momento angular se conserva, se la llama: **Órbita Kepleriana**

### 1.3.3. Ecuación de Movimiento General de una Órbita Kepleriana

Debido a que el movimiento de una órbita Kepleriana queda restringido a un plano, es más sencillo resolver la ecuación de movimiento en forma polar. En la figura 1.5 los vectores  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  son vectores unitarios colineales, respectivamente, a los vectores  $\vec{r}$  y  $v_v$ .



**Figura 1.5:** representación de los ejes radiales y transversales  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  respectivamente.

A partir de la definición de estos vectores, se puede encontrar la relación de los mismos con los ejes del sistema de coordenadas XY como:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \cos \nu \hat{x} + \sin \nu \hat{y} \\ \hat{j} &= -\sin \nu \hat{x} + \cos \nu \hat{y}\end{aligned}\tag{1.3.25}$$

La velocidad y posición del cuerpo de masa  $m$  ahora se puede definir en función de los nuevos vectores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{i} \\ \vec{v} &= v_v\hat{j} + v_e\hat{i}\end{aligned}\tag{1.3.26}$$

Diferenciando los vectores  $i$  y  $j$  se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{dt} &= \frac{d\hat{i}}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{d\hat{i}}{d\nu} \dot{\nu} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= \frac{d\hat{j}}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{d\hat{j}}{d\nu} \dot{\nu}\end{aligned}\tag{1.3.27}$$

Diferenciando la ecuación 1.3.25 respecto del ángulo  $\nu$ , se obtienen las tasas de cambio de los nuevos vectores en función de este ángulo.

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{d\nu} &= -\sin \nu \hat{x} + \cos \nu \hat{y} = \hat{j} \\ \frac{d\hat{j}}{d\nu} &= -\cos \nu \hat{x} - \sin \nu \hat{y} = -\hat{i}\end{aligned}\tag{1.3.28}$$

Ergo, utilizando la ecuación 1.3.28 se puede simplificar la expresión de la ecuación 1.3.27 en la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{dt} &= \hat{j} \dot{\nu} \\ \frac{d\hat{j}}{dt} &= -\hat{i} \dot{\nu}\end{aligned}\tag{1.3.29}$$

Para continuar es necesario derivar el vector posición de la ecuación 1.3.26 respecto del tiempo. Haciendo esto, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt} \hat{i} + r \frac{d\hat{i}}{dt} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \hat{i} + r \dot{\nu} \hat{j}\end{aligned}\tag{1.3.30}$$

Diferenciando nuevamente respecto del tiempo:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \hat{i} + r \dot{\nu} \hat{j} \right)\tag{1.3.31}$$

Realizando algunas manipulaciones aritméticas:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{i} + \dot{r}\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\nu}\hat{j} + r\frac{d\dot{\nu}}{dt}\hat{j} + r\dot{\nu}\frac{d\hat{j}}{dt} \\
\ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{i} + \dot{r}\dot{\nu}\hat{j} + \dot{r}\dot{\nu}\hat{j} + r\ddot{\nu}\hat{j} - r\dot{\nu}\dot{\nu}\hat{i} \\
\ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\nu}^2)\hat{i} + (2\dot{r}\dot{\nu} + r\ddot{\nu})\hat{j}
\end{aligned} \tag{1.3.32}$$

Esta última ecuación se utilizará en conjunto con la ecuación de la aceleración gravitacional re escrita a continuación:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GmM}{r^3}r\hat{i} = -\frac{\mu}{r^2}m\hat{i} \tag{1.3.33}$$

donde  $m$  es la masa del satélite en estudio,  $M$  la masa de la tierra y  $\mu = GM$ , llamado parámetro gravitacional terrestre. Reemplazando la ecuación 1.3.32 en la ecuación 1.3.33 se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mu}{r^2}m\hat{i} &= m\ddot{\vec{r}} \\
-\frac{\mu}{r^2}\hat{i} &= (\ddot{r} - r\dot{\nu}^2)\hat{i} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\nu} + r\ddot{\nu})}_{=0}\hat{j} \\
-\frac{\mu}{r^2}\hat{i} &= (\ddot{r} - r\dot{\nu}^2)\hat{i}
\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Para la simplificación del término que acompaña al vector  $\hat{j}$  se tuvo en cuenta que las aceleraciones en una órbita Kepleriana se deben sólo a las fuerzas gravitatorias. Esto significa que no existirán aceleraciones fuera del eje radial, lo que implica, que la componente de aceleración del eje  $\hat{j}$  es nula. Esto nos lleve al planteamiento de la ecuación diferencial no lineal:

$$\ddot{r} - r\dot{\nu}^2 = -\frac{\nu}{r^2} \tag{1.3.35}$$

Resuelta la ecuación 1.3.35, se resuelve finalmente la ecuación de movimiento para órbitas Keplerianas. Para resolver la misma es necesario realizar un reemplazo que simplifique la misma. Si se realiza el reemplazo  $r = 1/u$ :

$$r = \frac{1}{u}; \quad \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \tag{1.3.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} \\
&= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \\
&= -\frac{1}{u} \frac{du}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} \\
&\quad \left( = r^2 \frac{d\nu}{dt} = h \right) \\
&= -\frac{1}{u^2} \frac{d\nu}{dt} \frac{du}{d\nu} \\
\dot{r} &= -h \frac{du}{d\nu}
\end{aligned} \tag{1.3.37}$$

Para la derivada segunda:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{d}{dt} \left( h \frac{du}{d\nu} \right) \\
&= -\frac{d}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} \frac{du}{d\nu} h \\
\text{Considerar que } h/r^2 &= \frac{d\nu}{dt} \\
\ddot{r} &= -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\nu^2}
\end{aligned} \tag{1.3.38}$$

Reemplazando la ecuación 1.3.38 en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
-h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\nu^2} - \frac{1}{u} h^2 &= -\mu u^2 \\
\frac{d^2u}{d\nu^2} + u &= \frac{\mu}{h^2}
\end{aligned} \tag{1.3.39}$$

La solución a la ecuación 1.3.39 viene dada por la siguiente expresión:

$$u(\nu) = \frac{\mu}{h^2} + C \cdot \cos(\nu - \nu_0) \tag{1.3.40}$$

Para encontrar la constante de integración  $C$  se utiliza la ecuación de energía, definida como:

$$E = T + U \tag{1.3.41}$$



Donde  $T$  y  $U$  son las energías cinética y potencial respectivamente, definidas según:

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv^2}{2} \\ U &= -\frac{GM}{r}m \end{aligned} \tag{1.3.42}$$

Considerando la energía específica por unidad de masa  $E/m = \xi$ , la ecuación de energía queda definida como:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{1.3.43}$$

Para relacionar estas ecuaciones con la solución de la ecuación diferencial es necesario encontrar las relaciones de  $r$  y  $v^2$  respecto de  $u$ . La primera de ellas sale de la definición  $r = 1/u$ . La segunda requiere despejar las ecuaciones a continuación:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \\ &= \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\nu}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

Se conoce la relación de  $\frac{dr}{dt}$  con  $u$  y se sabe que  $h = \frac{1}{u^2} \frac{d\nu}{dt}$ , reemplazando:

$$\begin{aligned} v^2 &= \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} \right)^2 + (hu)^2 \\ &= \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\nu} \frac{d\nu}{dt} \right)^2 + (hu)^2 \\ &= h^2 \left( \frac{du}{d\nu} \right)^2 + h^2 u^2 \\ v^2 &= h^2 \left[ \left( \frac{du}{d\nu} \right)^2 + u^2 \right] \end{aligned} \tag{1.3.44}$$

Gracias a que conocemos la función  $u(\nu)$  se puede calcular la derivada de la misma respecto de  $\nu$ :

$$\frac{du}{d\nu} = -C \sin(\nu - \nu_0) \tag{1.3.45}$$

Conocida esta relación queda resolver los cuadrados de los términos de la ecuación [1.3.44](#).

$$\left(\frac{du}{d\nu}\right)^2 = C^2 \sin^2(\nu - \nu_0) \quad (1.3.46)$$

$$u^2(\nu) = \frac{\mu^2}{h^4} + 2\frac{\mu C}{h^2} \cos(\nu - \nu_0) + C^2 \cos^2(\nu - \nu_0)$$

Reemplazando la ecuación 1.3.46 en la ecuación 1.3.44 se obtiene:

$$v^2 = \frac{\mu^2}{h^2} + 2\mu C \cos(\nu - \nu_0) + C^2 h^2 \quad (1.3.47)$$

Con este último resultado se puede conocer la ecuación de la energía en función de la constante de integración  $C$ . Reemplazando los términos correspondientes en la expresión de la ecuación 1.3.43:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\mu^2}{2h^2} + \cancel{\mu C \cos(\nu - \nu_0)} + \frac{C^2 h^2}{2} - \frac{\mu^2}{h^2} - \cancel{\mu C \cos(\nu - \nu_0)} \\ \xi &= \frac{\mu^2}{2h^2} + \frac{C^2 h^2}{2} - \frac{\mu^2}{h^2} \\ \xi &= \frac{\mu^2}{2h^2} - \frac{C^2 h^2}{2} \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

Despejando la constante de integración  $C$  de la ecuación 1.3.48 y reordenando la expresión se obtiene:

$$C = \frac{\mu}{h^2} \sqrt{\frac{2\xi h^2}{\mu^2} + 1} \quad (1.3.49)$$

Definiendo la excentricidad ‘ $e$ ’ en función de la energía  $\xi$  como:

$$e = \sqrt{1 + 2\xi \frac{h^2}{\mu^2}}; \quad \text{Función inversa} \rightarrow \quad \xi = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{2h^2} \quad (1.3.50)$$

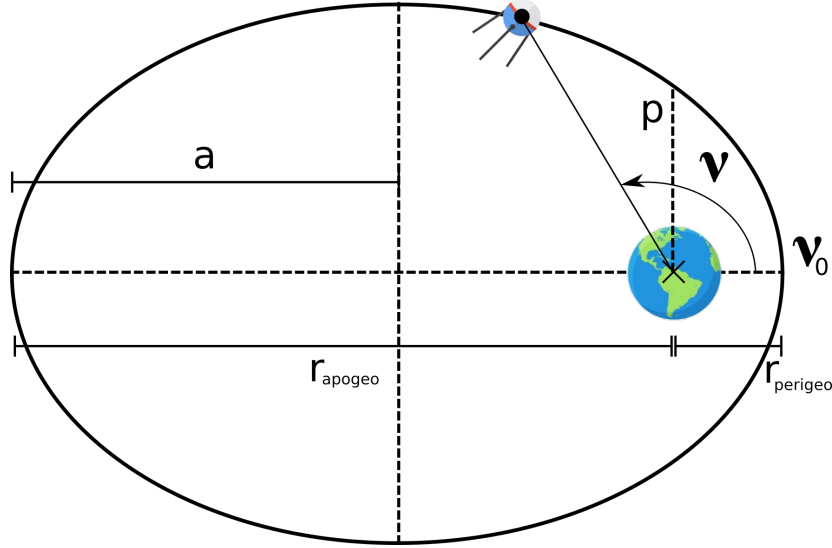
La constante de integración resulta  $C = \frac{\mu}{h^2} e$ . Reemplazando la constante de integración en la solución a la ecuación diferencial del problema 1.3.40 se obtiene:

$$u(\nu) = \frac{1}{r(\nu)} = \frac{\mu}{h^2} + \frac{\mu}{h^2} e \cos(\nu - \nu_0) = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\nu - \nu_0)] \quad (1.3.51)$$

Invirtiendo la ecuación 1.3.51 finalmente se tiene la ecuación general para órbitas Keplerianas:

$$r(\nu) = \frac{h^2}{\mu [1 + e \cos(\nu - \nu_0)]} = \frac{p}{[1 + e \cos(\nu - \nu_0)]} \quad (1.3.52)$$

Donde  $p = h^2/\mu$  conocido como el “*semi-latus rectum*” o “*parámetro orbital*”. A este tipo de órbitas no perturbadas se las denomina **órbita osculante**.



**Figura 1.6:** en esta representación se pueden observar algunos de los parámetros descriptivos de una órbita Kepleriana: el semi-latus rectum  $p$ , el semi eje mayor  $a$ , el radio de apogeo y perigeo  $r_{\text{apogeo}}$  y  $r_{\text{perigeo}}$  respectivamente y la anomalía verdadera  $\nu$ . Esta figura complementa las descripciones del texto.

#### 1.3.4. Breve Análisis de la Ecuación de Órbitas Keplerianas y Otras Relaciones Importantes

**Apoápside y Periápside** Si analizamos la ecuación general para Órbitas Keplerianas 1.3.52 para diversos casos se pueden encontrar relaciones útiles. Si analizamos los casos donde  $\nu = \nu_0$  y  $\nu - \nu_0 = \pi$ , se obtienen los puntos más bajo, o *periapsis*  $r_p$ , y más alto, o *apoapsis*  $r_a$ , de la órbita respectivamente.

$$r_p = \frac{p}{1 + e} \quad (1.3.53)$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e} \quad (1.3.54)$$

Además se puede hallar la excentricidad en función del apoapsis y periapsis:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (1.3.55)$$

En el caso de un satélite orbitando la tierra, estos puntos se llaman perigeo y apogeo, utilizando el sufijo *geo* en relación a la tierra.

**Semi Ejes Mayor y Menor** El semieje mayor ‘ $a$ ’ se puede deducir de la suma de los ápsides. Si se tiene en cuenta que la suma de los ápsides da como resultado dos veces el semi eje mayor, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 2a &= r_p + r_a \\
 2a &= p \left( \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e} \right) \\
 2a &= p \left( \frac{1-\cancel{e} + 1+\cancel{e}}{1-e^2} \right) \\
 2a &= \frac{2p}{1-e^2} \\
 \boxed{a = \frac{p}{1-e^2}} & \quad (1.3.56)
 \end{aligned}$$

Aplicando geometría de elipses es fácil ver que el semi eje menor ‘ $b$ ’ se puede calcular como:

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}} \quad (1.3.57)$$

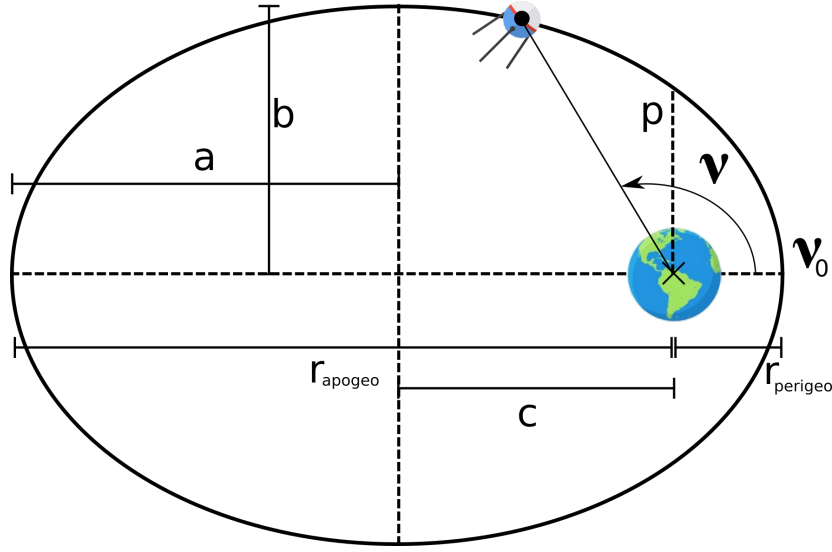
Otro parámetro geométrico importante para las deducciones futuras es la distancia del foco de la elipse, en este caso el foco orbital, al centro de la misma. El mismo se denomina  $c$  y se puede obtener como:

$$\boxed{c = ae} \quad (1.3.58)$$

Estos tres parámetros geométricos se encuentran relacionados por la ecuación:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad (1.3.59)$$

**Condición de Elipsidad** Para que la órbita resultante de condiciones determinadas sea elíptica, lo que abarca el alcance del presente trabajo, se necesita que la excentricidad se mantenga entre los valores 0 y 1 ( $0 < e < 1$ ). Si se utiliza la ecuación de la energía resultante de la relación entre la energía y la excentricidad 1.3.50, se puede hallar una relación entre la distancia de los cuerpos y la velocidad del cuerpo orbitante.



**Figura 1.7:** extensión de la figura 1.6. Además del semi-latus rectum  $p$ , el semi eje mayor  $a$ , la anomalía verdadera  $\nu$  y los radios de perigeo y apogeo  $r_{\text{perigeo}}$  y  $r_{\text{apogeo}}$  respectivamente, se agregan el semi eje menor  $b$  y el la distancia del centro de la elipse a los focos  $c$ . Esta figura complementa el desarrollo llevado a cabo en el texto.

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{2h^2}$$

Suponiendo el caso límite donde  $e = 1$ :

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} < \underbrace{(e^2 - 1)}_{=0} \frac{\mu^2}{2h^2}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} < 0$$

$$v < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}; \quad r < \frac{2\mu}{v^2}$$

(1.3.60)

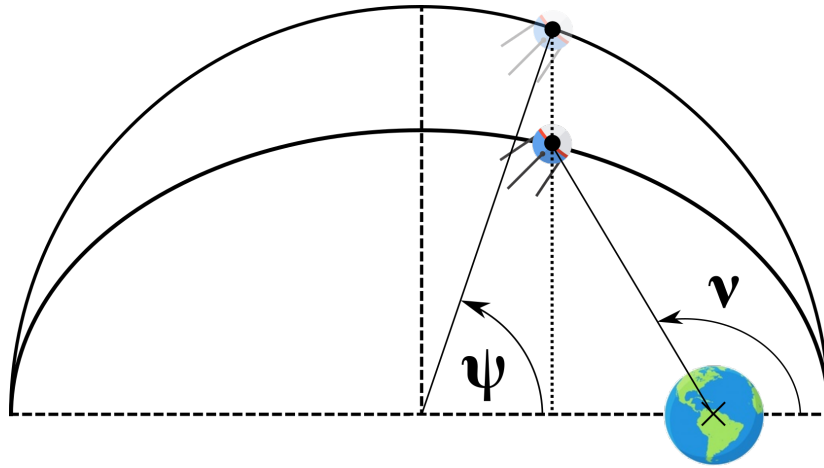
La ecuación 1.3.60 da restricciones respecto de la velocidad y la posición para que una órbita resulte cerrada. Una órbita se considera cerrada cuando forma un círculo o un elipse. Si alguna de estas restricciones no se cumpliera, el satélite orbitaría en alguna forma parabólica o hiperbólica y se perdería en el espacio.

### 1.3.5. Anomalías y Ecuación del Tiempo de *Kepler*

**Anomalías** Las anomalías permiten definir la posición de un cuerpo en una órbita con parámetros definidos. En particular es útil conocer los conceptos de *Anomalía Verdadera*, *Anomalía Excéntrica* y *Anomalía Media*.

La **Anomalía Verdadera** se define a partir de la desviación angular del cuerpo orbitante respecto del semieje mayor en el punto del periápside alrededor del foco orbital. Para conocer la anomalía verdadera de un cuerpo rotante es necesario conocer la posición del mismo en la órbita.

La **Anomalía Excéntrica** se define de la misma manera que la anomalía verdadera, pero toma otro centro y una proyección del cuerpo orbitante como referencias. El centro de esta anomalía se encuentra en el centro del segmento que forma el eje mayor de la elipse. La proyección del cuerpo la cuál se utiliza como referencia se realiza en el círculo mínimo que encierra a la elipse orbital. Estos conceptos son más fáciles describir de manera gráfica, lo cuál se puede observar en la figura 1.8.



**Figura 1.8:** se puede observar la definición de la anomalía excéntrica  $\psi$ . Notar que en una órbita circular el foco (la tierra) y el centro de la elipse coincidirían, haciendo ambas excentricidades iguales en valor.

La anomalía excéntrica permite relacionar el tiempo que el satélite lleva orbitando desde un punto de referencia con una posición espacial.

Existen ecuaciones de relación entre las anomalías que permiten encontrar una de ellas a partir de las otras. Estas se extraen de la referencia [3].

$$\psi = \psi(\nu, e) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = \nu(\psi, e)$$

$$\cos(\psi) = \frac{e + \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} \quad (1.3.61a)$$

$$\sin(\psi) = \frac{\sin(\nu) \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos(\nu)} \quad (1.3.61b)$$

$$\cos(\nu) = \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)} \quad (1.3.62a)$$

$$\sin(\nu) = \frac{\sin(\psi) \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos(\psi)} \quad (1.3.62b)$$

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (1.3.62c)$$

Existe una relación importante que permite encontrar la distancia  $r$  al foco orbital (cuerpo masivo) a partir de la anomalía excéntrica. Además, como se conocen las relaciones entre la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica, esto permite también conocer la distancia al foco orbital a partir del conocimiento de la primera. Así, se puede escribir la ecuación para órbitas Keplerianas en función de la anomalía excéntrica:

$$r = a[1 - e \cos(\psi)] \quad (1.3.63)$$

**Ecuación del Tiempo de Kepler** En la ecuación 1.3.23 se concluyó que el área barrida por unidad de tiempo por un vector que une los cuerpos orbitantes es constante. Además, se conoce esa tasa posee el valor indicado en la ecuación 1.3.24. Conociendo geométricamente el área total de la elipse orbital, es posible conocer el período de la órbita a partir del uso de la tasa de barrido de área. Siendo  $T$  el período orbital para una órbita dada y  $A$  el área de un elipse dada por  $A = \pi ab$ :

$$\pi ab = \frac{dA}{dt} T$$

$$\pi ab = \frac{1}{2} h T$$

$$T = \frac{2ab\pi}{h}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{\sqrt{p\mu}}$$

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a(1 - e^2)\mu}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

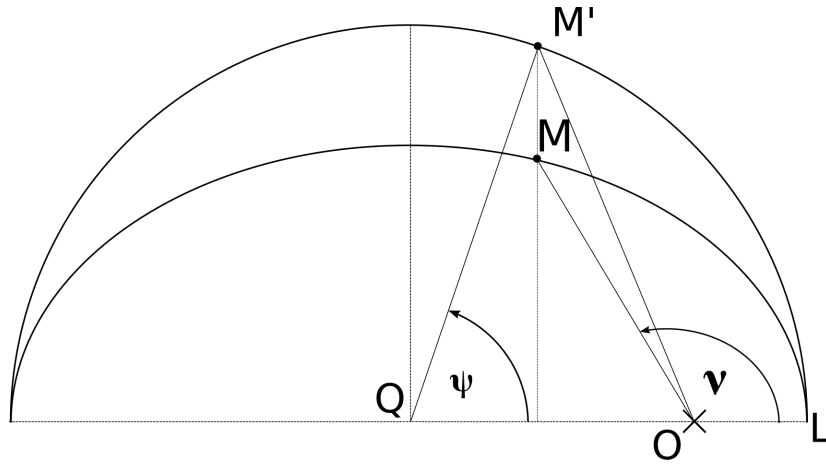
$$T = \frac{2\pi}{n} \quad (1.3.64)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (1.3.65)$$

Donde la variable  $n$  se define como **movimiento medio**. Es interesante notar que, como ya lo había dicho Kepler, el período orbital es únicamente dependiente de la magnitud del semieje mayor en una proporción exponencial de  $3/2$ . A partir del conocimiento del *movimiento medio* se puede conocer la *Anomalía Media*  $M$  como:

$$M(t) = n(t - t_p) \quad (1.3.66)$$

Esto implica que si conozco  $M$  puedo conocer cuanto hace que el cuerpo orbitante paso por el periápside en el momento  $t_p$ . Ya que una vuelta completa indica que  $t = T + t_p$ , esto implica que  $M(T + t_p) = n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi$ . Ya que el área barrida es proporcional al tiempo orbitado de manera constante, la anomalía media  $M$  indica la proporción lineal de área barrida entre 0 (comienzo de la órbita desde el punto de referencia) y  $2\pi$  (fin de la órbita en el punto de referencia).



**Figura 1.9:** relaciones geométricas necesarias para deducir la ecuación del tiempo de Kepler. En la figura se observan dos anomalías, la excéntrica ( $\varphi$ ) y la verdadera ( $\nu$ ), el centro de la elipse Q, el foco de órbita O, la posición de algún cuerpo M, la proyección M' en la órbita auxiliar y la posición de inicio L.

Si se define  $t_M$  como el tiempo desde que se paso el punto de referencia  $t_p$  ( $t_M = t - t_p$ ), al mismo se lo puede expresar como:

$$t_M = \frac{T}{\pi ab} \mathcal{S}(LOM) \quad (1.3.67)$$

Donde  $\mathcal{S}(LOM)$  es el área descripta por la órbita real entre los puntos L, O y M. Este área a su vez se puede relacionar con la anomalía excéntrica de la siguiente manera:



$$\mathcal{S}(LOM) = \frac{b}{a} \mathcal{S}(LOM') \quad (1.3.68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(LOM') &= \frac{\psi}{2\pi} (\pi a^2) - \mathcal{S}(OQM') \\ \mathcal{S}(LOM') &= \frac{\psi}{2\pi} (\pi a^2) - \frac{ac}{2} \sin(\psi) \\ \mathcal{S}(LOM') &= \frac{\psi}{2} a^2 - \frac{a^2 e}{2} \sin(\psi) \end{aligned} \quad (1.3.69)$$

Reemplazando la ecuación 1.3.69 en la ecuación 1.3.68 y a su vez esta en la ecuación 1.3.67 se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} t_M &= T \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\psi}{2} - \frac{e}{2} \sin(\psi) \right] \\ t_M &= \frac{T}{\pi} \left[ \frac{\psi}{2} - \frac{e \sin(\psi)}{2} \right] \\ t_M &= \frac{T}{2\pi} [\psi - e \sin(\psi)] \end{aligned}$$

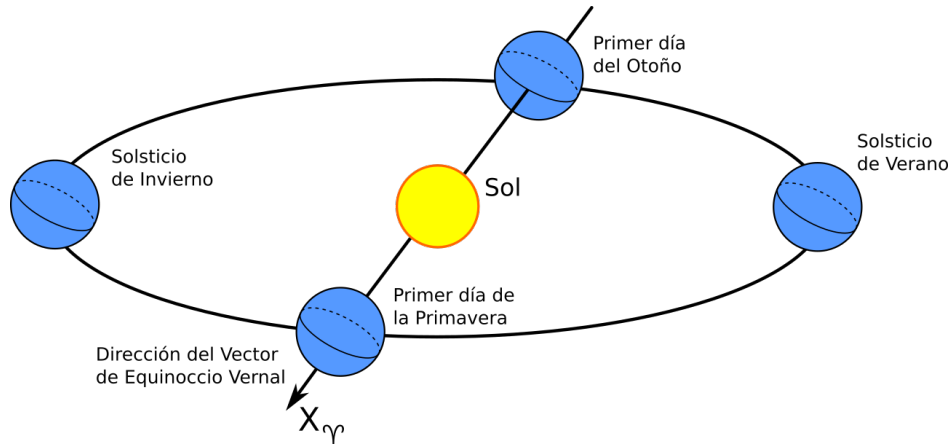
Recordando la definición de la anomalía media  $M$  se puede observar que:

$$M = t_M \frac{2\pi}{T} = (t - t_p) n = \psi - e \sin(\psi) \quad (1.3.70)$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación del tiempo de Kepler** y permite relacionar la posición del satélite con el tiempo transcurrido desde el perigeo. Esto completa todas las ecuaciones necesarias que relacionan la posición de un objeto en una órbita Kepleriana y el tiempo. Esto nos permite conocer el estado completo en el plano orbital.

### 1.3.6. Tridimensionalización del Plano Orbital

Si bien del desarrollo anterior se llegó a la conclusión que una órbita no perturbada se conserva dentro de un plano, es necesario ubicar este plano en el espacio tridimensional. Para ello, primero es necesario definir un sistema de coordenadas inercial fijo en el cuerpo masivo alrededor del cuál se orbitará, en nuestro caso, la Tierra. Usualmente para esto, se utiliza un sistema de coordenadas estandarizado llamado “*ECI*”, de las siglas en inglés “*Inercial Centrado en la Tierra*” (*Earth Centered Inertial*). Dicho sistema de coordenadas tiene su origen en el centro de masa de la tierra y no rota con la misma. Es decir, se mantiene fijo relativo al sistema solar. La terna de ejes se define

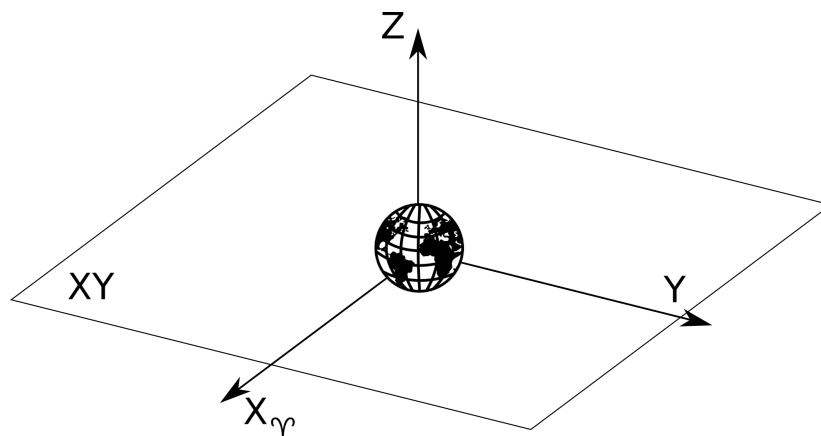


**Figura 1.10:** dirección del vector vernal. Las estaciones del año señaladas corresponden al hemisferio sur.

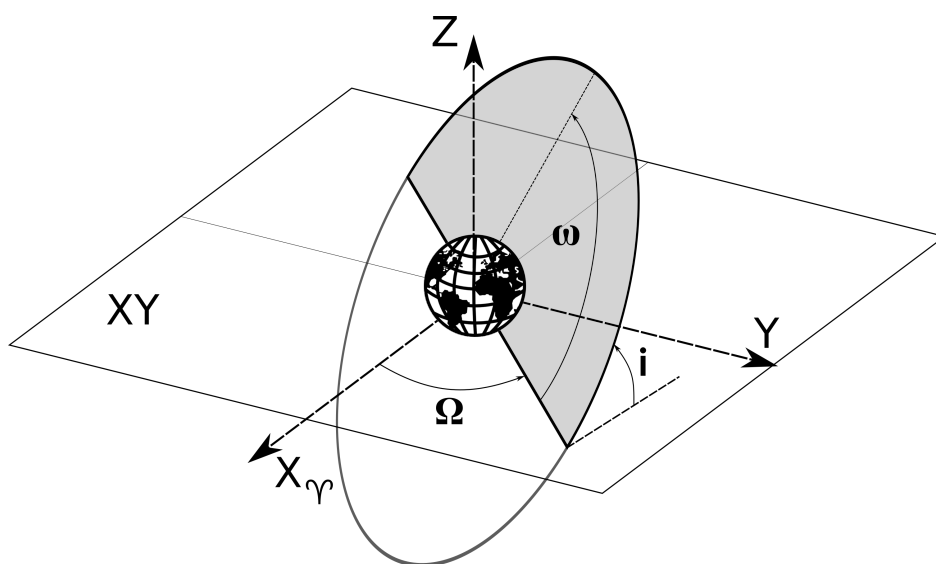
como se describe a continuación. El eje  $\vec{Z}$ , el tercero de la terna, es colineal con el eje de rotación de la tierra en dirección positiva. Es decir, es positivo bajo la convención de la regla de la mano derecha. El plano  $XY$  formado por los ejes  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  es coplanar con el plano ecuatorial de la tierra, perpendicular al eje de rotación de la tierra. El plano ecuatorial se encuentra inclinado respecto del plano eclíptico, que es el plano en el cual se encuentra la órbita terrestre alrededor del sol. Dicha inclinación es de  $23,5^\circ$ . La intersección de los dos planos, el ecuatorial y el eclíptico forman una recta que es inercial a los fines de este análisis. El eje  $\vec{X}$  es colineal a esta recta, con dirección positiva hacia la dirección donde se encuentra la tierra en el equinoccio primaveral del hemisferio sur, para más claridad ver figura 1.10. Este vector intersecta la esfera celeste en un punto llamado el “*primer punto de Aries  $\gamma$* ” o el “*punto vernal*”. Es por esto que en algunas fuentes al eje  $\vec{X}$  se lo suele encontrar escrito como  $\vec{X}_{\gamma}$ . Finalmente, el segundo eje de la terna, el vector  $\vec{Y}$ , se define perpendicular a los dos anteriores, quedando así completa la terna de ejes. En la figura 1.11 se pueden observar los vectores de la terna y el plano ecuatorial. Si bien ya se enunció, no está de más repetir que este sistema de coordenadas *no rota* con la tierra.

Una vez definido el sistema de coordenadas ECI, se puede ubicar el plano de órbita osculante en el espacio. Para ello se hace uso de tres parámetros: la inclinación  $i$ , el nodo de ascenso superior (de aquí en más, nodo de ascenso)  $\Omega$  y el argumento de perigeo  $\omega$ . La inclinación  $i$  se define como el ángulo formado entre el plano ecuatorial y el plano de la órbita. El nodo de ascenso  $\Omega$  es el ángulo que existe entre el vector vernal y el punto de la órbita en que el satélite que cruza el plano ecuatorial en dirección norte. Finalmente, el argumento de perigeo  $\omega$ , es el ángulo entre el punto donde el satélite cruza el plano ecuatorial en dirección norte y la posición del perigeo. En la figura 1.12 se puede encontrar la definición de estos parámetros de manera gráfica.

Utilizando los parámetros definidos para ubicar el plano orbital en el espacio, junto a los parámetros asociados al plano orbital ( $a$ ,  $e$  y  $M$ ) completan un sistema de 6



**Figura 1.11:** sistema de coordenada ECI. El eje  $\vec{Z}$  es colineal con el momento angular de la tierra, el eje  $\vec{X}$  apunta en la dirección vernal y el eje  $\vec{Y}$  se define perpendicular a los dos anteriores. Este sistema de coordenadas no rota con la tierra.



**Figura 1.12:** representación de los parámetros inclinación  $i$ , nodo de ascenso  $\Omega$  y argumento de perigeo  $\omega$  en el sistema de coordenadas ECI.

parámetros necesarios para conocer la posición y velocidad de un cuerpo moviéndose en cualquier órbita Kepleriana. Estos parámetros son conocidos como los **parámetros orbitales clásicos**. Notar que para ángulos de inclinación cercanos a cero, los parámetros  $\omega$  y  $\Omega$  son difíciles de definir. Esto implica que debe remarcarse un alcance máximo de este tipo de representación. Desde el punto de vista analítico, este sistema no se encuentra definido para  $i = 0$ .

Escribiendo los parámetros orbitales clásicos en forma de vector, se obtiene el vector

de parámetros clásicos  $\vec{\alpha}$ :

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ M \end{bmatrix} \quad (1.3.71)$$

Debido a que las cantidades  $M$ ,  $\nu$  y  $\varphi$  se encuentran relacionadas, es equivalente escribir el vector de parámetros clásicos con cualquiera de estas variables.

$$\begin{bmatrix} a \\ e \\ M \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ M \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ \nu \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ \psi \end{bmatrix} \quad (1.3.72)$$

### 1.3.7. Órbitas no Keplerianas

El modelo ideal de órbitas Keplerianas nos permitió obtener herramientas útiles para el análisis de órbitas. A partir de aquí es necesario que nos movamos en dirección de la no-idealidad con el fin de obtener nuevas herramientas. La ecuación 1.3.7 es la ecuación básica de movimiento para una órbita Kepleriana. La misma puede reescribirse como:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \gamma_k \quad (1.3.73)$$

Donde  $\gamma_k$  son las aceleraciones Keplerianas del sistema. Sabiendo que una órbita Kepleriana es una órbita no perturbada, puede escribirse esas condiciones de la siguiente manera:

$$\frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad \frac{dM}{dt} = n \quad (1.3.74)$$

Ya que en el caso real existirán perturbaciones tanto intencionales como no intencionales, es necesario tener herramientas para describir el caso de perturbación más general. Esto se representa por el término de perturbación  $\gamma_p$  como:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \gamma_k + \gamma_p \quad (1.3.75)$$

La ecuación 1.3.75 es la ecuación más general para un cuerpo en cualquier tipo de órbita. El término  $\gamma_p$  se define como el término de aceleraciones de perturbación. Con

este planteo, se puede definir a las órbitas osculantes como aquellas donde  $\gamma_p = 0$ . Este tipo de órbitas serán una herramienta útil para conocer las condiciones instantáneas de una órbita. Normalmente al graficar una órbita, lo que en realidad se está graficando, es la órbita osculante resultante de quitar todas las perturbaciones externas a una órbita Kepleriana.

Como el principal objetivo de este trabajo incluye el estudio de transferencias orbitales, es necesario que podamos modificar los parámetros iniciales de una órbita de manera controlada. Estos parámetros se modifican en vuelo con la utilización de la fuerza de empuje de los propulsores del satélite. Estas fuerzas propulsoras se consideran en un sistema de órbitas como una “perturbación”. Con este motivo, es necesario encontrar expresiones de las tasas de cambio de cada parámetro respecto de las perturbaciones del sistema. Esto nos permitiría encontrar los efectos de la propulsión en los parámetros orbitales. En el presente trabajo utilizaremos las ecuaciones de perturbación correspondientes a los parámetros orbitales clásicos.

Las siguientes 6 ecuaciones definen la velocidad de cambio de cada uno de los elementos del vector de parámetros clásicos y se denominan “**ecuaciones variacionales de Gauss**”, ó simplemente “**ecuaciones variacionales**”.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_a(a, e, i, \Omega, \omega, M, t); & \frac{de}{dt} &= F_e(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \\ \frac{di}{dt} &= F_i(a, e, i, \Omega, \omega, M, t); & \frac{d\Omega}{dt} &= F_\Omega(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \\ \frac{d\omega}{dt} &= F_\omega(a, e, i, \Omega, \omega, M, t); & \frac{dM}{dt} &= F_M(a, e, i, \Omega, \omega, M, t) \end{aligned} \quad (1.3.76)$$

### 1.3.8. Sistemas de Coordenadas

Para poder expresar las ecuaciones variacionales, es necesario definir sistemas de coordenadas convenientes para poder expresar las aceleraciones de “perturbación” que ejercen los propulsores. Dos sistemas de coordenadas serán utilizados a lo largo del desarrollo de este trabajo:  $\mathcal{RSW}$  y  $\mathcal{NTH}$ . Estos sistemas son similares. Ambos poseen como centro de coordenadas al satélite. Si bien al satélite se lo consideró una masa puntual para el desarrollo de este análisis, debe aclararse que ninguno de estos sistemas de coordenadas rota con el satélite. Las ecuaciones variacionales para estos sistemas no se desarrollarán debido a su extensión, las mismas se extraerán de las fuentes indicadas en cada descripción.

**Sistema de Coordenadas  $\mathcal{RSW}$**  El sistema de coordenadas  $\mathcal{RSW}$  es un sistema ternario con centro en el satélite. El primero de sus vectores, el eje  $\mathcal{R}$ , apunta en la dirección del vector de posición  $\vec{r}$  del satélite. El segundo eje, el eje  $\mathcal{S}$ , es perpendicular

a  $\mathcal{R}$ , positivo en la dirección de movimiento del satélite y se encuentra en el plano orbital. Finalmente el eje  $\mathcal{W}$  es perpendicular a los dos anteriores y apunta en la misma dirección que el momento angular provocado por la orbitación, según la regla de la mano derecha. En la figura 1.13 se pueden observar los vectores de dirección para cada eje.

Las ecuaciones variacionales para este tipo de sistema de coordenadas se extrae de Sidi [3]. Éstas son:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \{e \sin(\nu) a_r + [1 + e \cos(\nu)] a_s\} \quad (1.3.77a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ \sin(\nu) a_r + \left[ \cos(\nu) + \frac{e + \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} \right] a_s \right\} \quad (1.3.77b)$$

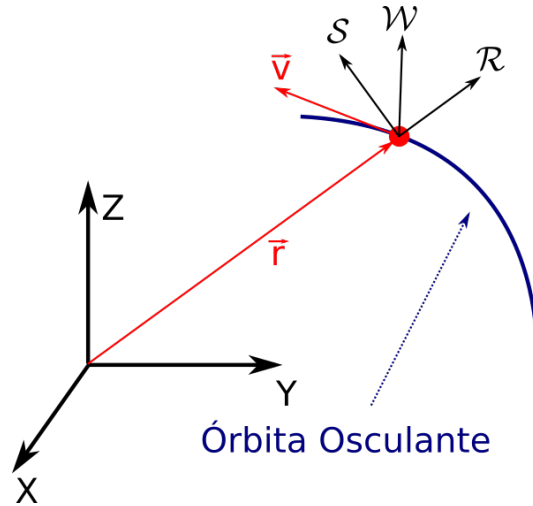
$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \cos(\nu + \omega) a_w \quad (1.3.77c)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin(\nu + \omega)}{\sin(i)} a_w \quad (1.3.77d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -\cos(\nu) a_r + \sin(\nu) \left( 1 + \frac{r}{p} \right) a_s \right\} \\ & - \frac{r \cot(i) \sin(\nu + \omega)}{\sqrt{a(1-e^2)} \mu} a_w \end{aligned} \quad (1.3.77e)$$

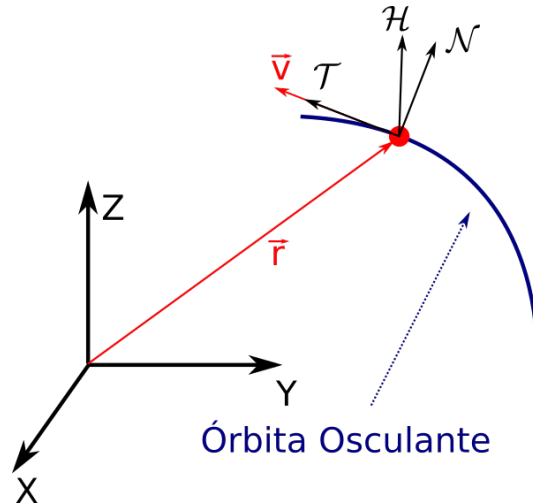
$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & n + \frac{1-e^2}{nae} \left\{ \left[ \frac{-2e}{1+e \cos(\nu)} + \cos(\nu) \right] a_r \right. \\ & \left. - \left[ 1 + \frac{1}{1+e \cos(\nu)} \right] \sin(\nu) a_s \right\} \end{aligned} \quad (1.3.77f)$$

donde  $a_r$ ,  $a_s$  y  $a_w$  corresponden a las componentes de la aceleración en los respectivos ejes  $\mathcal{RSW}$ .



**Figura 1.13:** sistema de coordenadas  $RSW$ . En la figura se observan: la dirección radial  $R$ , la dirección de movimiento del satélite  $S$  y la dirección del momento angular del satélite  $W$ .

**Sistema de Coordenadas  $\mathcal{NTH}$**  El sistema de coordenadas  $\mathcal{NTH}$  es, como el anterior, un sistema ternario con centro en el satélite. Sus vectores se definen comenzando por el segundo de la terna, el vector  $\mathcal{T}$ . Este vector es colineal con la velocidad del satélite y positivo en la dirección de la misma. El vector  $\mathcal{N}$  es el primero de los vectores de la terna y es perpendicular al anterior, positivo en la dirección del vector posición  $\vec{r}$ . Finalmente el vector  $\mathcal{H}$  se define de la misma manera que el vector  $\mathcal{W}$  del caso anterior. En la figura 1.14 pueden verse definidos los vectores  $\mathcal{NTH}$ .



**Figura 1.14:** sistema de coordenadas  $\mathcal{NTH}$ . En la figura se observan: la dirección tangencial  $\mathcal{T}$ , la normal  $\mathcal{N}$  y la dirección del momento angular del satélite  $\mathcal{H}$ .

Las ecuaciones variacionales para este tipo de sistema de coordenadas se extrae de Conway [4]. Éstas son:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2v}{\mu} a_t \quad (1.3.78a)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{v} \left\{ 2[e + \cos(\nu)] a_t + \frac{r}{a} \sin(\nu) a_n \right\} \quad (1.3.78b)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{h} \cos(\nu + \omega) a_h \quad (1.3.78c)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\nu + \omega)}{h \sin(i)} a_h \quad (1.3.78d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{ev} \left\{ 2 \sin(\nu) a_t - \left[ 2e + \frac{r}{a} \cos(\nu) \right] a_n \right\} \\ - \frac{r}{h \sin(i)} \sin(\nu + \omega) \cos(i) a_h \end{aligned} \quad (1.3.78e)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2} - \frac{1}{ev} \left\{ 2 \sin(\nu) a_t - \left[ 2e + \frac{r}{a} \cos(\nu) \right] a_n \right\} \quad (1.3.78f)$$

donde  $a_n$ ,  $a_t$  y  $a_h$  corresponden a las componentes de la aceleración en los respectivos ejes  $\mathcal{NTH}$ . Tanto las ecuaciones para el sistema RSW como para el sistema NTH se encuentran vagamente definidas cuando la inclinación y la excentricidad se aproximan a cero. Es por esto que es importante que la inclinación y la excentricidad siempre superen valores superiores a 0,001. Es decir  $e > 0,001$  y  $\sin(i) > 0,001$ .

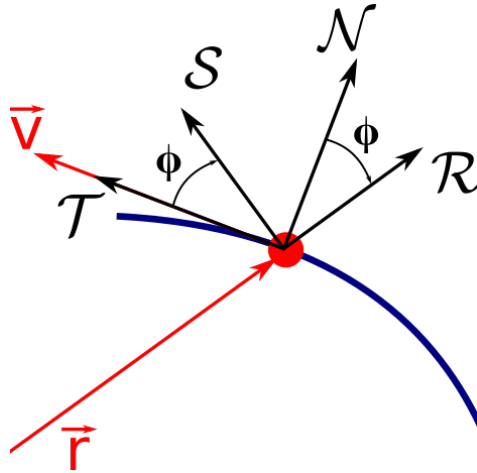
**Ángulo de Ataque ó *Flight Path Angle (fpa)*** Si se inspecciona los sistemas de coordenadas  $\mathcal{RSW}$  y  $\mathcal{NTH}$ , puede notarse que ambos sistemas son iguales a menos de una rotación. El ángulo a rotar para cambiar de un sistema a otro puede calcularse a partir de las relaciones [5]:

$$\sin(\phi) = \frac{e \sin(\nu)}{\sqrt{1 + 2e \cos(\nu) + e^2}} \quad (1.3.79a)$$

$$\cos(\phi) = \frac{1 + e \cos(\nu)}{\sqrt{1 + 2e \cos(\nu) + e^2}} \quad (1.3.79b)$$

donde  $\phi$  es el ángulo de ataque, ó *flight path angle*. Notar que si la excentricidad es nula ( $e = 0$ ), o sea que la órbita es circular, el ángulo  $\phi$  se hace cero y los sistemas de coordenadas coinciden. En la figura 1.15 puede observarse de manera gráfica el ángulo  $\phi$ .





**Figura 1.15:** ángulo de ataque ó *flight path angle*  $\phi$ . Notar que cuando este es nulo, los sistemas de coordenadas  $\mathcal{R}SW$  y  $\mathcal{N}TH$  coinciden. Los ejes terceros,  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{H}$ , no se incluyeron en el dibujo para mayor claridad del mismo.

### 1.3.9. Utilización de Propelente

Se realizó un análisis muy detallado de las implicancias de los parámetros referidos a los propulsores en la tesis de grado [6]. Aquí sólo incluiremos las fórmulas necesarias que se usaron para poder calcular la tasa de utilización de propelente y el empuje de los propulsores.

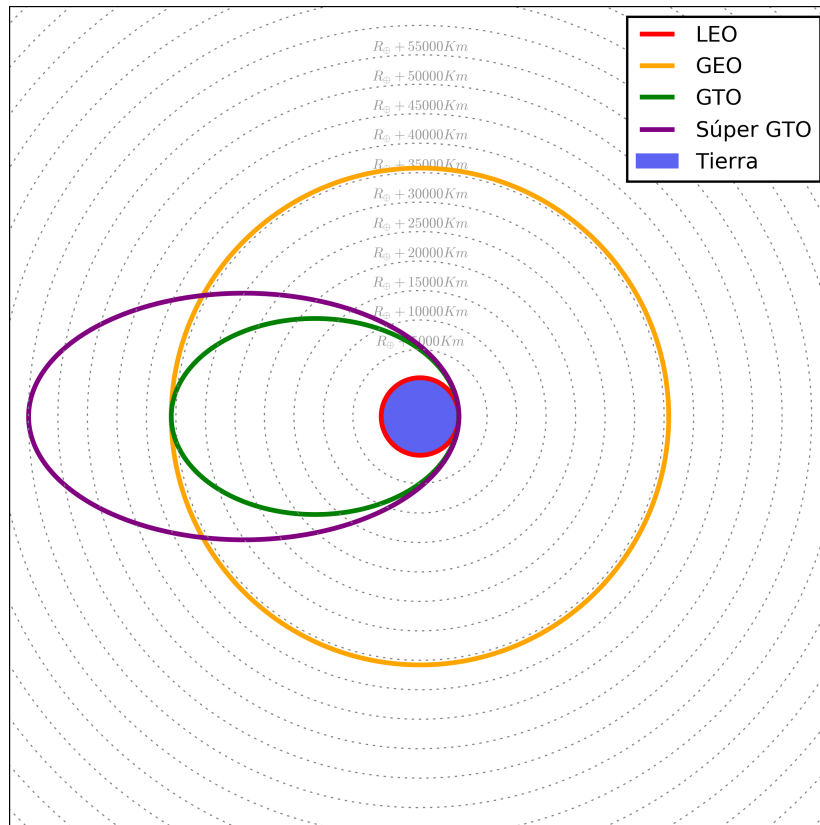
$$\frac{dm}{dt} = \frac{T}{g_0 \cdot I_{sp}} \quad (1.3.80)$$

$$T = 2 \frac{\eta P}{I_{sp} g_0} \quad (1.3.81)$$

donde  $T$  es el empuje del propulsor,  $\eta$  es el rendimiento eléctrico del propulsor,  $g_0$  es la aceleración gravitatoria terrestre al nivel del mar e  $I_{sp}$  es el empuje específico de los propulsores.

### 1.3.10. Órbitas Estándar

No siempre se dan todos los parámetros orbitales para describir una órbita. Existen cierto tipos de órbitas estándares de las que se puede hablar sabiendo que requerimientos cumplen. Esto sirve para sintetizar información y para aclarar rápidamente con que tipo de órbita se esta trabajando. A continuación describiremos el léxico que describe algunos tipos de órbitas típicas.



**Figura 1.16:** diversas órbitas estándares mencionadas a lo largo del trabajo. La órbita LEO es la órbita terrestre de baja altura (*Low Earth Orbit*), la órbita GEO es la órbita geoestacionaria, la órbita GTO es la órbita de transferencia geoestacionaria (*Geostationary Transfer Orbit*) y Súper GTO es la órbita GTO con un apogeo superior a la altura geoestacionaria.

## Órbitas Circulares

Toda órbita con excentricidad nula, es decir, con  $e = 0$  es una órbita circular. En una órbita circular el foco orbital de la elipse y el centro de la misma coincide. A lo largo de una órbita circular, la distancia del satélite a la tierra nunca cambia y los sistemas de coordenadas  $\mathcal{NTH}$  y  $\mathcal{RSW}$  son coincidentes. Es decir, para este tipo de órbitas, el ángulo de ataque es nulo para toda posición. En la figura 1.16 se pueden observar las órbitas GEO y LEO, ambas, circulares.

## Órbitas Ecuatoriales

Cuando la inclinación en una órbita es nula, la misma se denomina órbita ecuatorial. Esto se debe a que la misma se encuentra alineada con el ecuador de la tierra, el plano  $XY$  en el sistema de coordenadas ECI. Para este tipo de órbitas no todos los parámetros clásicos son definibles:  $\Omega$  y  $\omega$  se indefinen.

## Órbitas Geosíncronas

Una órbita alcanza un estado geosíncrono cuando su período es igual al de un día terrestre. Esto es independiente de la inclinación o la excentricidad. Notar que, que una órbita sea geosíncrona, no implica que se verá siempre desde el mismo punto en la tierra ya que, debido a la elipsidad, la velocidad en distintos puntos de la órbita variará.

## GEO

Las siglas “*GEO*” describen una órbita **GEOestacionaria**. Dicho tipo de órbitas son órbitas circulares, ecuatoriales y síncronas. Esto implica que desde la tierra el satélite puede verse como punto fijo en el espacio, lo cuál es muy útil para diversos ámbitos técnicos como lo son las telecomunicaciones. En la figura 1.16 puede verse el plano orbital de una órbita geoestacionaria. La altura geoestacionaria es 35,786 km.

## LEO

Una órbita “*LEO*” es una órbita de baja altitud, típicamente circular, que puede ser o no inclinada. Las siglas LEO provienen del inglés “*Órbita Terrestre Baja*” (*Low Earth Orbit*). Dichas órbitas son utilizadas normalmente por satélites de observación terrestre. Su período orbital ronda los 90 minutos. En la figura 1.16 puede observarse el plano orbital de una órbita LEO.

## GTO

Una órbita “*GTO*” es una órbita que se utiliza para transferir satélites hacia una órbita geoestacionaria. Las siglas GTO provienen del inglés “*Órbita de Transferencia Geoestacionaria*” (*Geostationary Transfer Orbit*). Normalmente el lanzador posiciona a los satélites en este tipo de órbitas para que luego los mismos realicen la transferencia programada. En la figura 1.16 puede observarse el plano orbital de una órbita geoestacionaria. Típicamente el apogeo de este tipo de órbitas es igual a la altura geoestacionaria.

## Súper GTO

Una órbita Súper GTO es similar a una GTO con la diferencia que el apogeo es superior a la altura geoestacionaria. En la figura 1.16 puede observarse el plano orbital de una Súper GTO.



# Capítulo 2

## Desarrollo del Software

Para poder desarrollar las estrategias de transferencia fue necesario construir una herramienta de propagación. Esta herramienta de propagación debía permitirnos realizar simulaciones de transferencias, analizar los datos de éstas (tiempos de transferencia, propelente utilizados, etc.) y ser utilizado por un algoritmo de optimización externo, entre otras tareas. Con este objetivo presente se escribió CUSOI, de las siglas en inglés “*Integrador de Órbitas Simplificadas en C++/CUDA*” (*C++/CUDA Simplified Orbital Integrator*). De aquí en adelante se cuando se quiera hacer referencia al código desarrollado lo llamaremos por el nombre de “CUSOI” ó “Cusoi” indistintamente.

Cusoi es un software de integración numérica que permite integrar órbitas de manera rápida ( $< 1s$ ), con posibilidad de correr de manera paralela en una GPU compatible, así como de manera secuencial, y permite probar de manera versátil diferentes estrategias de transferencia. El código utiliza un método de integración de órbitas simplificado, lo que permite que las simulaciones puedan integrarse con tiempo de cómputos relativamente bajos. A su vez, se desarrolló en *Python* una serie de clases que permiten tomar los datos de las simulaciones ejecutadas en Cusoi y las presentan de una manera ordenada y accesible para su fácil análisis y extracción de datos. A este paquete de clases que se desarrolló en *Python* para poder organizar las simulaciones se lo llamó “PyCusoi”. En este capítulo se hará una descripción de las distintas partes de la herramienta, qué problema resuelve y cómo sus partes están conectadas entre sí.

### 2.1. Método de Propagación

Para realizar la simulación de una transferencia, es necesario integrar los cambios que se generan en los parámetros orbitales debido a los impulsos y perturbaciones, actualizarlos y avanzar un determinado paso temporal. A este proceso se le llama “propagación”, ya que *propaga* los cambios de la órbita en el tiempo y permite predecir la evolución de la misma. Para realizar esta propagación, usualmente se integra paso

a paso temporal las ecuaciones variacionales y se actualizan los parámetros a cada paso. Sin embargo, este proceso tiene un costo computacional grande respecto a otros métodos más simples. Un método sugerido en Conway [4] es el método de promediado orbital.

### 2.1.1. Método de Promediado Orbital

En el capítulo anterior estudiamos que, desde el punto de vista de órbitas Keplerianas, las fuerzas propulsoras se pueden expresar como perturbaciones en las ecuaciones variacionales. Una particularidad de las fuerzas aplicadas por propulsores eléctricos, es que estas son muy pequeñas en relación a la masa del satélite y a la fuerza gravitatoria, usualmente del orden de decenas a centenas de mili-Newton. Debido a estas fuerzas tan pequeñas, las aceleraciones provocadas en los satélites debido a los propulsores son también pequeñas (en relación a la aceleración gravitatoria): del orden de  $10^{-3} \sim 10^{-5} m/s^2$ , cuando la aceleración gravitatoria es de  $9,8m/s^2$  al nivel del mar y  $0,224m/s^2$  a la altitud geoestacionaria, a unos 42.164 km del centro de la tierra ó 35.786 km de altitud. Debido a que las aceleraciones de los propulsores son despreciables frente a otras aceleraciones del sistema, se considera una simplificación válida considerar que todos los parámetros orbitales se mantienen constantes alrededor de una revolución, independientemente de si los propulsores se encuentran encendidos o no. Esta simplificación implica que no es necesario actualizar los parámetros orbitales a cada paso, sino que se puede integrar el cambio de los parámetros alrededor de una revolución y actualizarlos a posteriori. A este método se lo llama **método de promediado orbital**. Un precio a pagar por usar una simplificación como esta, es que se pierde información respecto a las variables “rápidas”, como lo son la anomalía verdadera.

Para aplicar dicho método es necesario definir el vector de parámetros orbitales promediados, el cual toma el vector de parámetros orbitales, menos la anomalía verdadera, y le agrega la masa del satélite. Esta adición se realiza porque, también es de interés mantener registro de la evolución de la masa del satélite a lo largo de la transferencia. Este vector, entonces, se define como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{e} \\ \bar{i} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{\omega} \\ \dots \\ \bar{m} \end{bmatrix}; \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\bar{a}}{dt} \\ \frac{d\bar{e}}{dt} \\ \frac{d\bar{i}}{dt} \\ \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} \\ \dots \\ \frac{d\bar{m}}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Las tasas de cambio de la ecuación 2.1.1 se obtienen de las ecuaciones variacionales de Gauss de acuerdo al sistema de coordenadas en el que se esté trabajando. La barra sobre cada uno de los parámetros indica que estos son los parámetros promediados. Para el análisis de este trabajo se puede considerar los valores promediados como buenas referencias para los valores reales finales. Esto se comprobará más adelante en las validaciones.

### 2.1.2. Perturbaciones Incluidas

Además de las perturbaciones, en el sentido de órbitas Keplerianas, provocadas por los propulsores, se incluyen perturbaciones no intencionales en los modelos dinámicos. Estas perturbaciones son sugeridas por Conway como las más reelevantes: la sombra terrestre (debido a la necesidad de luz solar de los propulsores eléctricos para encenderse) y el achatamiento de la tierra.

#### 2.1.2.1. Sombra Terrestre

El efecto de la sombra terrestre en el satélite es bastante directo: sin luz solar, el satélite no posee la suficiente potencia eléctrica para encender los propulsores. Es por esto que el código debe ser capaz de calcular la posición del sol, según alguna fecha inicial configurada, y computar si el satélite está recibiendo luz solar de manera directa. Esto se realiza utilizando el algoritmo “LIGHT” de la referencia [5]. Este comprueba que la tierra no se interponga entre el vector sol-satélite.

El código integra únicamente la aceleración debida a los propulsores en los pasos donde el satélite se encuentra expuesto al sol. Esto simula la restricción de encendido de los propulsores sólo frente a la luz solar.

### 2.1.2.2. J<sub>2</sub>; Achatamiento de la Tierra

Los efectos del achatamiento de la tierra se modelan según Conway, promediando los efectos de armónico zonal  $J_2$  a lo largo de una revolución. Estos se pueden expresar finalmente como:

$$\dot{\bar{\Omega}}_{J_2} = \frac{-3nR_E^2 J_2}{2a^2 (1 - e^2)^2} \cos(i) \quad (2.1.2)$$

$$\dot{\bar{\omega}}_{J_2} = \frac{3nR_E^2 J_2}{4a^2 (1 - e^2)^2} [4 - 5 \sin^2(i)] \quad (2.1.3)$$

donde  $R_E$  es el radio de la tierra,  $n$  es el movimiento medio y  $J_2$  es un coeficiente de achatamiento de valor  $1,0826 \times 10^{-6}$ .

### 2.1.3. Método de Integración

Una vez resuelta todas las aceleraciones del sistema, es necesario integrar las velocidades de cambio de los elementos orbitales para conocer el cambio total de los mismos revolución a revolución. Para esto, es necesario seguir los pasos de cualquier integración numérica: discretizar el espacio, evaluar las tasas de cambio en los puntos de discretización e integrar esas cantidades para conocer el cambio total. Al inspeccionar las ecuaciones variacionales de Gauss se puede deducir que, si se mantienen todos los parámetros orbitales constantes (método de promediado orbital), excepto la anomalía verdadera, las velocidades de cambio de los parámetros orbitales serán funciones de la anomalía verdadera. Esto puede expresarse como:

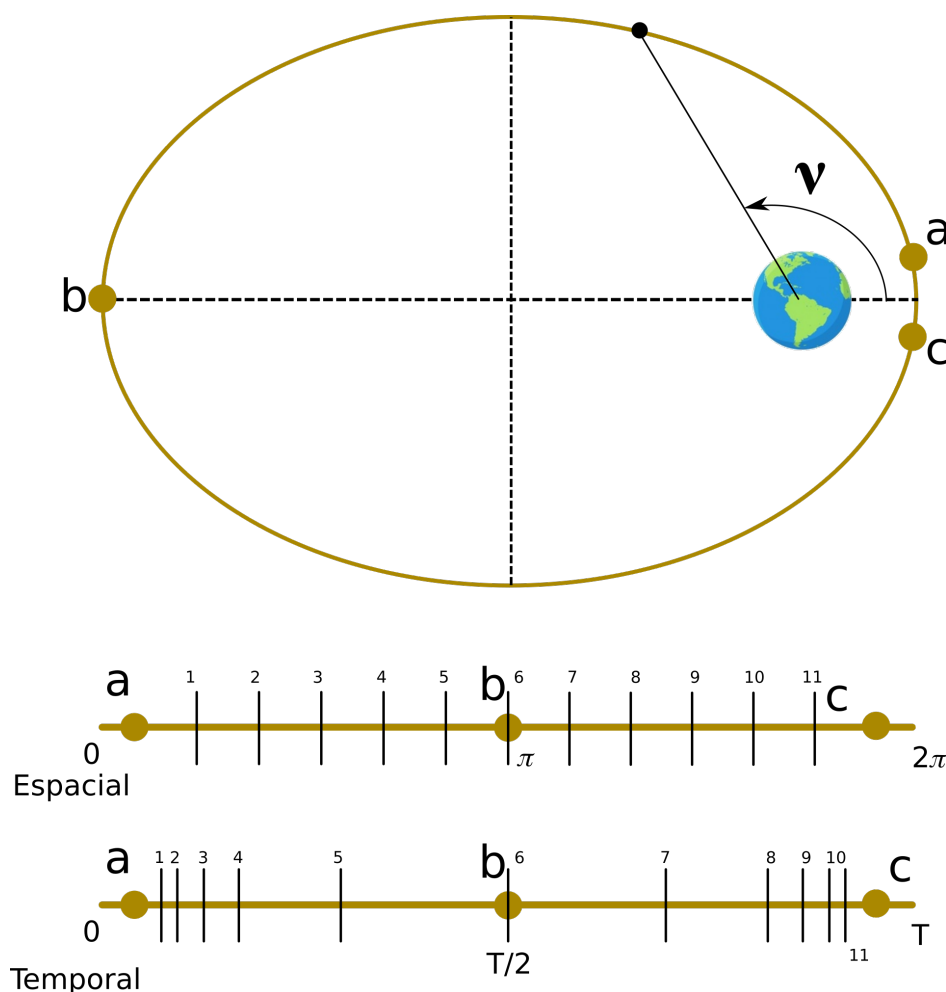
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{d\nu}(\nu) \quad (2.1.4)$$

Para integrar la ecuación 2.1.3 es necesario discretizar el “eje” de anomalías verdaderas y evaluar las velocidades de cambio en los puntos de discretización. Sin embargo, la integración de las ecuaciones anteriormente calculadas, deben realizarse en función del tiempo y no de la anomalía verdadera. Esta discrepancia entre el espacio discretizado y el espacio de integración se resuelve a continuación.

#### 2.1.3.1. Mallado

Para poder evaluar las velocidades de cambio de los parámetros orbitales, se discretiza el “eje” de anomalía verdadera. Para esto, se toman los valores de principio a fin de  $\nu$  a lo largo de una revolución (0 a  $2\pi$ ) y se discretiza de manera equidistante en tantos pasos como se considere. La figura 2.1 ayuda a visualizar este concepto.





**Figura 2.1:** discretización del espacio de anomalía verdadera y su equivalencia en el espacio temporal. En el eje espacial se puede ver la discretización equidistante del espacio de  $\nu$  y su equivalencia distorsionada en el espacio temporal. En este caso  $T$  indica el período orbital total de una revolución.

Una vez discretizada la anomalía verdadera, se evalúan las velocidades de cambio en los puntos de discretización. Luego, para integrar, es necesario saber la equivalencia temporal de las posiciones físicas de los puntos de discretización. Esta equivalencia de desarrolló en el capítulo anterior. La misma puede encontrarse en la sección de *Anomalías y Ecuación del Tiempo de Kepler*. Es importante notar que el valor temporal encontrado para cada espacio de discretización no es equidistante, ya que la velocidad a lo largo de la órbita no es constante para una órbita no circular. Como resultado de esta equivalencia, se conoce para cada punto discretizado de anomalía verdadera el tiempo que pasó desde el perigeo para que el satélite pase por esta posición. Con esta información es posible integrar las ecuaciones variacionales de Gauss.

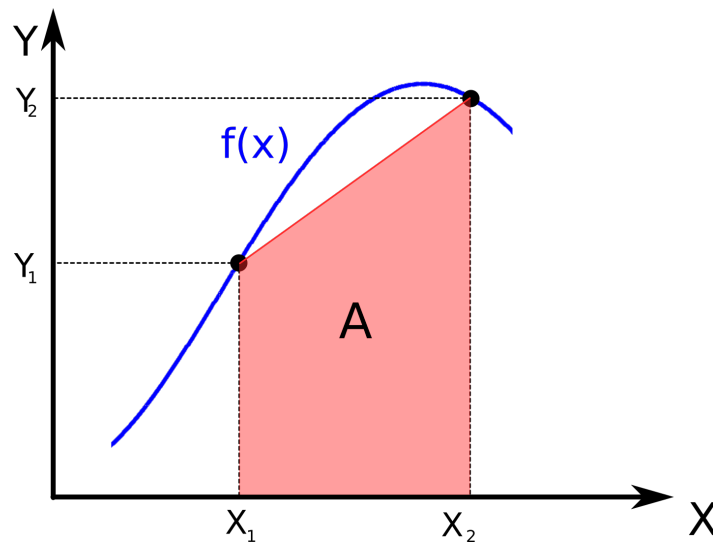
### 2.1.3.2. Integración

Una vez conocido los valores temporales de los puntos de discretización, es necesario elegir un método de integración que permita evaluar el cambio total de determinado

parámetro orbital a lo largo de una revolución completa. El método de integración elegido para este trabajo es el método de integración trapezoidal. Este método encuentra áreas parciales de integración con el uso de la siguiente fórmula:

$$A = \frac{y_2 + y_1}{2} (x_2 - x_1) \quad (2.1.5)$$

donde  $A$  es el “área” integrada por el método,  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos de la grilla de discretización en el eje temporal y  $y_1$  e  $y_2$  son valores de las velocidades de cambio de algún parámetro para los respectivos puntos de discretización. La figura 2.2 muestra estos valores de manera gráfica.



**Figura 2.2:** método trapezoidal de integración. El área  $A$  representa la magnitud integrada. En este trabajo el eje  $x$  representa el tiempo y el eje  $y$  representa la velocidad de cambio de algún parámetro orbital.

Una vez integradas todas las áreas parciales  $A$ , se realiza la suma de las mismas a lo largo del eje integrado para obtener la magnitud del cambio total. Esto se repite para todos los parámetros orbitales promediados y para la masa del satélite.

#### 2.1.4. Propagación

Según lo mencionado por Pollard y Conway [2] [4], una vez calculada la tasa de cambio de los parámetros para una revolución completa, se pueden propagar las mismas como se describe a continuación. Primero se calcula la tasa de cambio promedio de la siguiente manera:

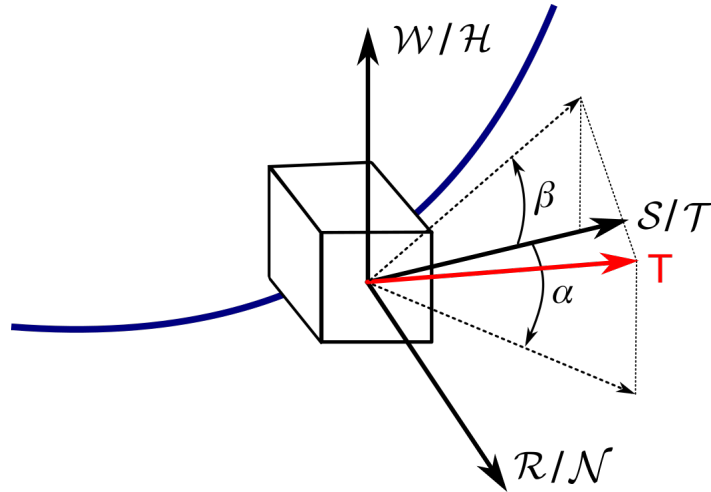
$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{T} \int \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\nu} d\nu \quad (2.1.6)$$

Una vez conocida esta tasa de cambio promedio, se propaga en el tiempo multiplicando esta tasa por un tiempo deseado. Es aquí donde el software desarrollado se

diferencia respecto de los métodos típicos de promediado orbital. En nuestro caso la propagación temporal se realiza revolución a revolución. Esto es lo mismo que decir que al final de cada revolución los parámetros orbitales se actualizan. De esta manera es posible aplicar estrategias más versátiles que no estén sujetas a pasos temporales pre configurados. Además, de esta manera el código creado es más versátil y no necesita ser modificado de manera sustancial para probar estrategias distintas. Esto se debe a que, de haber condiciones para la propulsión, éstas se pueden comprobar paso a paso, revolución a revolución sin realizar saltos temporales, como los métodos tradicionales.

### 2.1.5. Definición de Variables

Antes de describir la arquitectura del software desarrollado es necesario definir algunas convenciones que se utilizaron a lo largo de este trabajo. Las más importantes son referentes a las direcciones de propulsión definidas con los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Estas direcciones se encuentran definidas de la misma manera independientemente de sistema de coordenadas utilizado, ya sea  $\mathcal{RSW}$  o  $\mathcal{NTH}$ .  $\alpha$  se mide desde el segundo eje de cualquiera de las ternas en dirección al primero de los ejes. Este ángulo mide la dirección de la componente planar de la propulsión.  $\beta$  se mide desde la componente planar de la propulsión en dirección del tercer eje de la terna. Este ángulo mide la desviación del plano orbital de la propulsión. En la figura 2.3 pueden observarse la definición de las variables antes descritas.



**Figura 2.3:** convención de las variables de dirección utilizadas para este trabajo.  $T$  es el empuje provocado por los propulsores del satélite.  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos de propulsión que dirigen la dirección de la propulsión  $T$ .

De esta manera, si se considera el eje primario de la terna ( $\mathcal{R}$  para  $\mathcal{RSW}$  ó  $\mathcal{N}$  para  $\mathcal{NTH}$ ) como “1”, al segundo de la terna ( $\mathcal{S}$  para  $\mathcal{RSW}$  ó  $\mathcal{T}$  para  $\mathcal{NTH}$ ) como “2” y al eje restante como “3”, se puede expresar las componentes de la propulsión en cada

eje como:

$$a_1 = \frac{T}{m} \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (2.1.7a)$$

$$a_2 = \frac{T}{m} \sin(\alpha) \cos(\beta) \quad (2.1.7b)$$

$$a_3 = \frac{T}{m} \sin(\beta) \quad (2.1.7c)$$

## 2.2. Arquitectura del Software

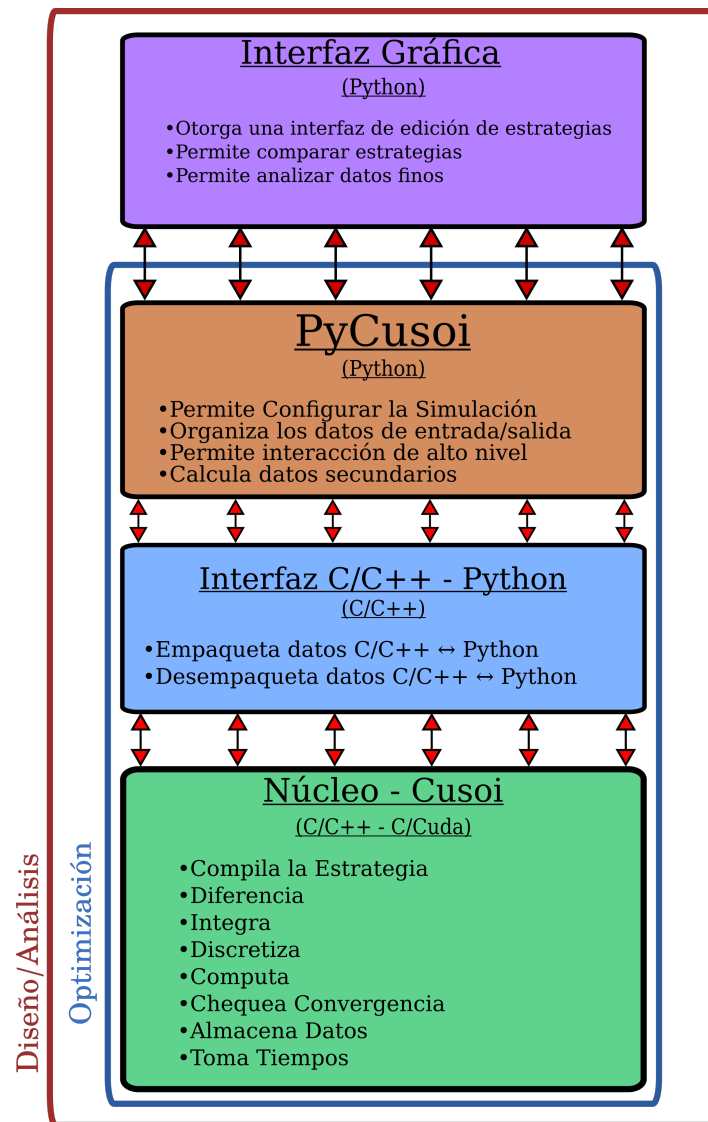
En la siguiente sección se describe la arquitectura del software desarrollado. También se hace énfasis en las tareas que realizan cada una de las partes desarrolladas.

### 2.2.1. Estructura General

La estructura principal del software desarrollado implica 4 partes principales: un núcleo de integración, una interfaz de empaquetado de datos, una interfaz de alto nivel y una interfaz gráfica que ayuda al diseño de órbitas y al estudio de las mismas. En la figura 2.4 se pueden observar las distintas capas de software. El núcleo de integración se encarga de la diferenciación de las ecuaciones variacionales de Gauss, la integración de las mismas y la actualización de las variables orbitales. Las distintas interfaces se encargan de hacer la información disponible del software más clara para el usuario de manera de facilitar el análisis de datos de transferencia.

### 2.2.2. CUSOI - Núcleo de Integración

El núcleo de integración se encuentra escrito en dos lenguajes de programación: C++ y C/CUDA. De esta manera, el software es ejecutable en GPU tanto como en CPU. En caso de ser ejecutado en una GPU, cada paso de integración se ejecuta en un *thread* de la GPU. En cambio si es ejecutado en secuencia (CPU con un sólo thread) los pasos de integración se ejecutan de manera sucesiva. Esta parte del software se encarga de todas las tareas numéricas más intensivas: discretización del espacio de integración, cómputo de las ecuaciones variacionales, integración de las ecuaciones y actualización de los parámetros orbitales. Para la interacción del núcleo de integración con otras partes del software, se utilizan cuatro objetos que acarrean toda la información necesaria para comenzar una simulación y la información pertinente a los resultados de la simulación. Estos objetos son: un objeto de características iniciales de la órbita, un objeto que maneja la salida de datos, un objeto de opciones del integrador y el plan de estrategia a simular en forma de *string*.



**Figura 2.4:** estructura general del software desarrollado.

### 2.2.2.1. Configuración de Opciones

Cusoi posee una clase que integra las opciones del simulador. Esta clase se llama `OrbitateOptions` y la misma maneja las siguientes opciones:

- Número de pasos de integración por revolución orbital. Es decir, en cuantos pasos se divide la anomalía verdadera y el tiempo para integrar en una revolución.
- Revoluciones máximas. Si el código no alcanza los requerimientos de convergencia es necesario limitar la cantidad de vueltas máximas que se propagan.
- Nivel de verbosidad. De acuerdo a la cantidad de distintos datos de salida que se quieren obtener, es necesario configurar este nivel entre 4 opciones distintas.
- Formato de Estrategia. El código permite trabajar en dos tipos de formatos de estrategias distintas: ángulos de propulsión o magnitud de las componentes de

aceleración. Estas estrategias se formatean de la misma manera y es necesario informar al núcleo de que manera interpretar las mismas.

- Características de los propulsores. Esta es la forma en que el código se informa del empuje de los propulsores.
- Sombra terrestre. Esta opción activa o desactiva el efecto de la sombra terrestre en la capacidad de propulsión del satélite. De todas maneras, aunque se encuentre desactivados los efectos, para fines analíticos se calcula si el satélite se encuentra expuesto a la luz solar de todas maneras.
- *Threads*. Si el código se utiliza en una GPU, es necesario informar al mismo cuantos hilos por bloque de CUDA se desean ejecutar.

A través de la utilización de esta clase es posible configurar el integrador para llevar a cabo las distintas simulaciones.

#### 2.2.2.2. Integración

La función principal del núcleo de integración posee un lazo principal en el cual se ejecutan los pasos de la propagación. Este lazo principal se encarga de integrar las ecuaciones variacionales, actualizar el mallado en cada revolución de la integración, comprobar convergencia (si  $e < 0,001$  y/o  $\text{sen}(i) < 0,001$ ) y guardar los datos correspondientes a la verbosidad seleccionada. En la figura 2.9 se muestra un diagrama de flujo con el orden de las acciones que ejecuta el lazo principal de integración. En la figura 2.5 se muestra el diagrama de flujo de la función de integración ejecutada en cada iteración del lazo de propagación.

#### 2.2.2.3. Guardado de Datos

No todos los datos calculados por el integrador se guardan para analizar, algunos son datos volátiles que se eliminan al finalizar cada paso de la iteración de integración. Que datos son volátiles y que datos son guardados para su posterior análisis, se puede configurar en las opciones. Existe 4 pre-configuraciones de datos guardados y datos volátiles llamados “Niveles de Verbosidad”. A continuación se detalla, en orden de menor a mayor, que datos guarda el integrador. Cada nivel superior de verbosidad guarda los mismos datos que el nivel inferior, más datos adicionales.

**Verbosidad 0:** esta es la verbosidad mínima del integrador. En esta configuración sólo se almacena:

- Estado inicial de los parámetros orbitales y la masa del satélite,



**Figura 2.5:** diagrama de flujo de las acciones llevadas a cabo por la función de integración, que se llama en cada iteración del lazo.

- Estado final de los parámetros orbitales y la masa del satélite,
- Tiempo total de la transferencia,
- Tiempo de compilación de la estrategia,
- Número total de revoluciones integradas,
- Tiempo de cómputo de la integración.

Este nivel de verbosidad es el recomendado cuando se realizan optimizaciones respecto del tiempo de transferencia, ya que el integrador no pierde tiempo en el guardado y exportado de datos.

**Verbosidad 1:** este nivel de verbosidad es el mínimo que se necesita para trazar las curvas de evolución de los parámetros orbitales. Adiciona a la verbosidad anterior los siguientes datos:

- Valor de los parámetros orbitales y la masa del satélite en cada revolución,
- Valor del mallado temporal en cada revolución.

**Verbosidad 2:** este nivel de verbosidad permite obtener información más detallada como lo son el historial de ángulos de propulsión del satélite o los puntos de incidencia de luz solar. Este nivel adiciona los siguientes datos a la Verbosidad 1:

- Exposición a la luz solar en cada paso en cada revolución,
- Ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  en cada paso en cada revolución,
- Componente de la aceleración de los propulsores en cada uno de los ejes, en cada paso, en cada revolución,
- Ángulo de ataque en cada paso en cada revolución,
- Grado de acción de los propulsores en cada paso en cada revolución.

Si se desea conocer el plan de vuelo de un satélite a partir de los ángulos de propulsión, es necesario ejecutar la estrategia de transferencia deseada en este nivel de Verbosidad.

**Verbosidad “*Debug*” ó “de Depuración”:** este es el último y más detallado de los niveles de verbosidad. Se utilizó en el desarrollo del código para conocer los valores de las ecuaciones variacionales en cada paso, y poder comprobar que los mismos fueran correctos. Este último nivel completa la siguiente información:

- Todas las tasas de cambio de todos los parámetros orbitales y la masa del satélite para todos los pasos, para todas las revoluciones.

Siendo este el nivel más completo de información, no se recomienda utilizar al mismo en contextos de optimización ya que el tiempo de guardado de datos y exportación de los mismos comienza a ser significativo. Es recomendable usar este nivel sólo para análisis de transferencias o comprobación de datos.

#### 2.2.2.4. Formato de Estrategias

Para poder modificar las estrategias que se ejecutan en un código compilado sin necesidad de volver a compilar el código, se utilizaron herramientas de compilación dinámica. Esta solución se llevo adelante ya que permite probar estrategias nuevas sin la necesidad de modificar el código base de Cusoi. Para insertar el código de las estrategias en el núcleo de integración, este se guarda en formato de **string**. El código de estrategia



consta de dos partes: un encabezado que se repite para todas las estrategias y la formulación de las estrategias en sí. El encabezado tiene toda la información que se necesita para poder realizar la compilación en tiempo de ejecución: las declaraciones de las funciones, los archivos a incluir y la entrada y salida de todas las variables que permiten resolver la estrategia del satélite. La formulación de la estrategia, por otra parte, es código C que contiene las expresiones matemáticas de la estrategia. La formulación se divide en 4 partes: tres representan los parámetros necesarios para definir el vector de empuje y uno para el impulso específico de los propulsores.

Las tres partes de la formulación de la estrategia dedicadas al vector de empuje se pueden escribir en dos formatos: ángulos de propulsión ó componentes de aceleración en ejes coordenados. El formato de ángulos utiliza la primera parte de la formulación para determinar el grado de acción de los propulsores, la segunda determina el ángulo  $\alpha$  y la tercera el ángulo  $\beta$ . En el caso del formato de componentes de aceleración en ejes coordenados, las partes describen de respectivamente los ejes 1, 2 y 3 de cada sistema. Si se trabaja en el sistema de coordenadas  $\mathcal{RSW}$ , la primera parte de la formulación describirá la aceleración en la componente  $\mathcal{R}$ , la segunda en la componente  $\mathcal{S}$  y la tercera en la componente  $\mathcal{W}$ . Esto es lo mismo con el sistema  $\mathcal{NTH}$ .

La cuarta y última parte de la formulación expresa el impulso específico en segundos en función del grado de acción de los propulsores.

El formato en que la estrategia se encuentra escrito se puede configurar en las opciones del integrador. En la figura 2.6 se muestra un ejemplo de una formulación de estrategia utilizada para la validación del código.

```
float e = orbit.eccentricity;
float Y = -2*(1.0)/((1 + e * cos(grid[index])) * tan(grid[index]/2.0));

float alpha = atan(
    Y * (1 - e * sin(grid[index] / 2) * sin(grid[index] / 2))
);

return alpha;
```

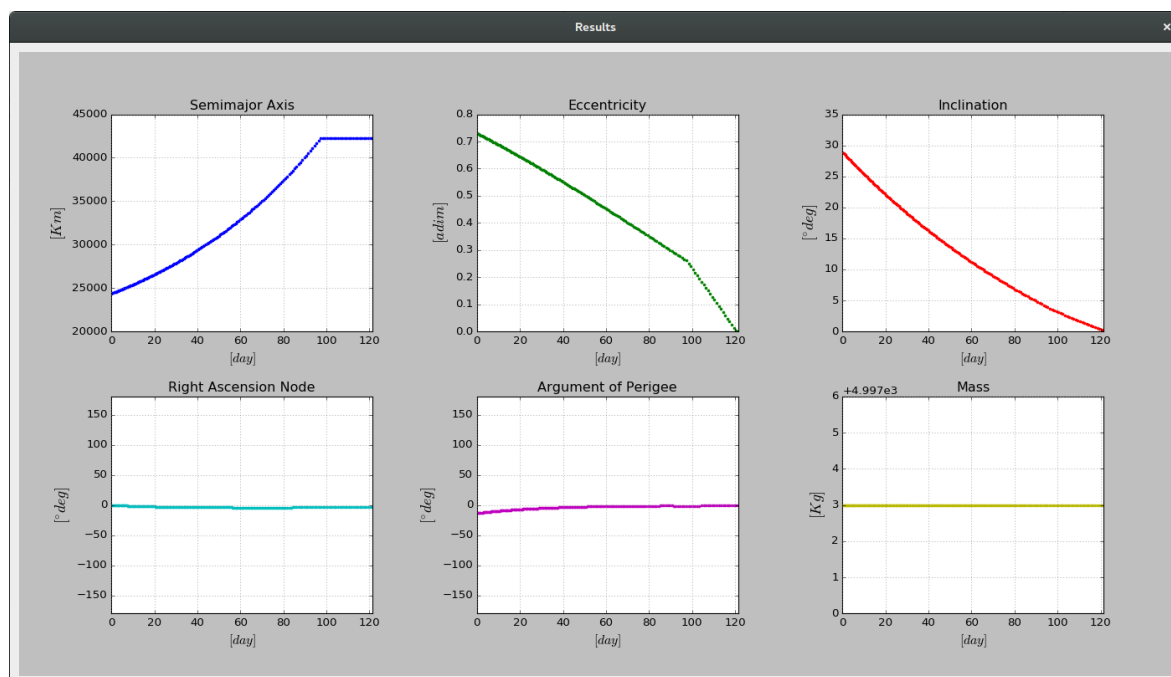
**Figura 2.6:** ejemplo de formulación de estrategia. Este código parametriza el comportamiento del parámetro  $\alpha$  para alguna estrategia de transferencia. Esta estrategia en particular es planteada por Gopinath [1]. En la sección de validación se mostrarán los resultados de la implementación de esta estrategia con Cusoi.

### 2.2.3. GUI - Herramienta de Análisis

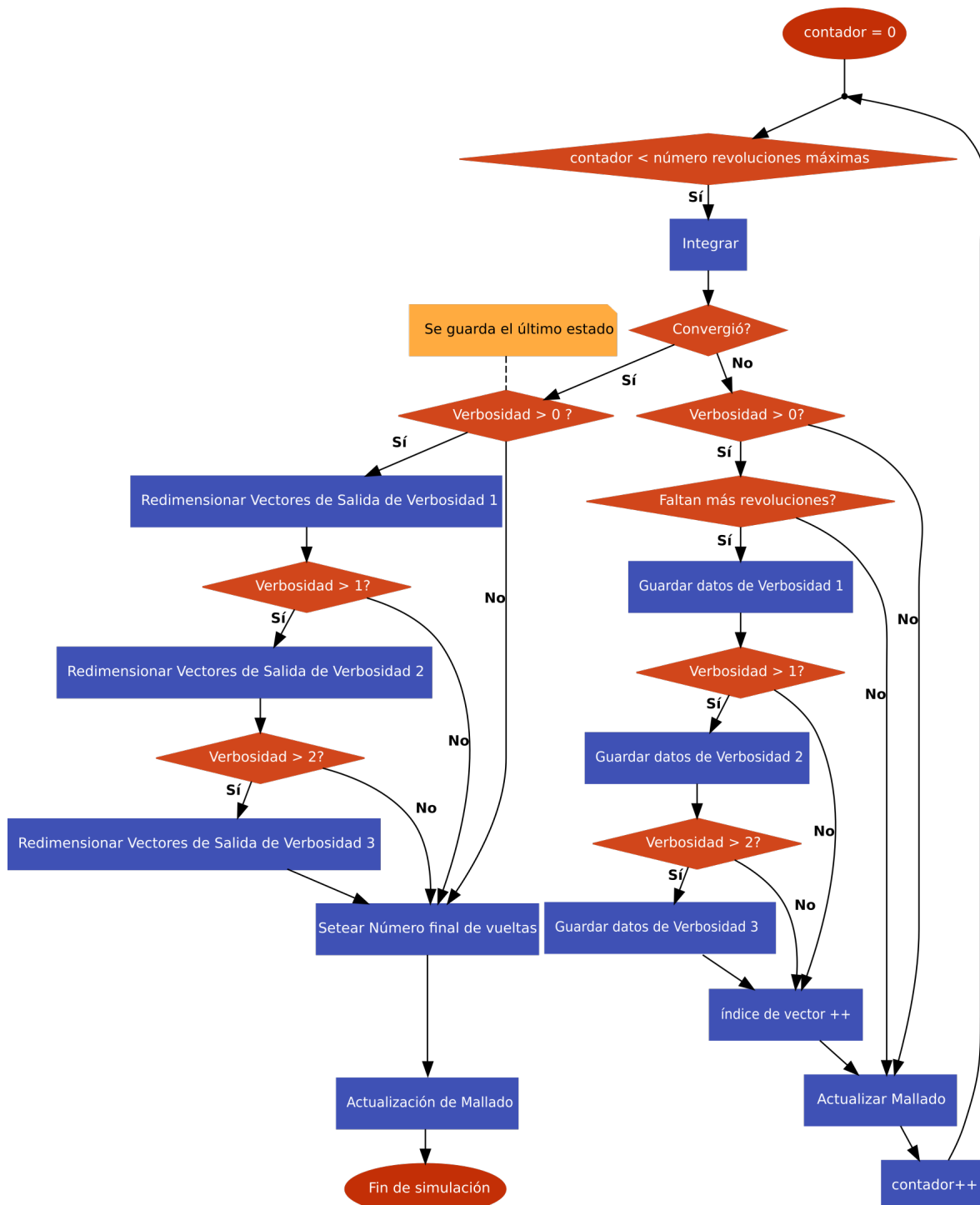
Para poder analizar y experimentar con estrategias de manera dinámica, sin necesidad de ejecutar código de manera manual cada vez que se cambia un parámetro, se creo una interfaz gráfica que permite correr el núcleo de integración en un formato amigable para el usuario del código. En las figuras 2.7 y 2.8 se muestra la pantalla principal de la interfaz y la ventana curvas de evolución respectivamente para una estrategia dada.



**Figura 2.7:** interfaz gráfica para la utilización del código. La misma permite configurar las estrategias y el integrador de manera cómoda y rápida para poder analizar los resultados de una dada estrategia.



**Figura 2.8:** curvas de evolución presentadas en la interfaz gráfica para la estrategia de transferencia planteada por Pollard [2], utilizada para la validación de este algoritmo.



**Figura 2.9:** diagrama de flujo de las acciones llevadas a cabo por el lazo principal de integración.



## Capítulo 3

# Pruebas de Validación

Una vez completado el propagador, es necesario validar que las ecuaciones dinámicas del mismo hayan sido correctamente programadas. Para ello, se realizaron una serie de comparaciones frente a resultados varios: se utilizó un código comercial y el resultado de distintas publicaciones. En especial, se buscó que las estrategias de propulsión hayan estado escritas de manera explícita, es decir, que las funciones de parametrización de las direcciones de propulsión o de las componentes de aceleración estuvieran expresadas en la bibliografía a comparar. Se debió guardar especial cuidado en esto, ya que en gran parte de la bibliografía consultada no se mostraban resultados directos de estrategias puntuales con su parametrización, lo cual no permite validar las ecuaciones dinámicas de manera directa. Para el código comercial, se utilizaron estrategias simples de impulso continuo de corta duración (10 revoluciones).

En cada caso los datos se compararon según correspondió. Frente a los resultados del código comercial se realizó comparación numérica, pues se disponían dichos datos. En cambio, las comparaciones frente a las publicaciones se hicieron de manera gráfica superponiendo las curvas de evolución de los resultados para ambos casos. En este último caso, se tuvo que realizar este tipo de comparación debido a la falta de datos numéricos que permitieran comparar las curvas.

### 3.1. Validación en 2D; Gopinath [1]

El problema de transferencia planar, es decir, cuando se desea transferir el satélite de un valor de semi eje mayor y excentricidad a otro, es independiente del cambio del resto de los parámetros orbitales. Éste se considera un problema en dos dimensiones, ya que éstos cambios sólo afectan a la forma de la órbita en el plano en el que se encuentra definida. Es decir, los cambios en inclinación, nodo de ascenso y argumento de perigeo no afectan a los cambios en semi eje mayor y excentricidad, esto puede observarse en las ecuaciones de Gauss.

Siendo este un problema de dos variables, se lo eligió para realizar la primera de las validaciones, ya que es aconsejable comenzar a validar por los casos más simples. Esto, se debe a que si fuera necesario corregir parte del código, el problema se encuentra limitado a las ecuaciones relacionadas a las variables estudiadas, es decir, el semi eje mayor y la excentricidad.

## Estrategia Planteada

El apogeo de una órbita GTO coincide con la altura geoestacionaria. Es decir, coincide con la altura final deseada en una transferencia del tipo GTO - GEO. Gopinath plantea una estrategia de transferencia en la que el apogeo se mantiene constante durante la duración de la misma, ignorando las variables tridimensionales. Como el apogeo se mantendrá fijo durante el proceso, esta restricción se escribe de la siguiente manera:

$$r_{\text{apogeo}} = a(1 - e) = a_{\text{final}} \quad (3.1.1)$$

Derivando la restricción anterior se obtiene:

$$\frac{da}{dt} = - \left[ \frac{a_{\text{final}}}{(1 - e)^2} \right] \frac{de}{dt} \quad (3.1.2)$$

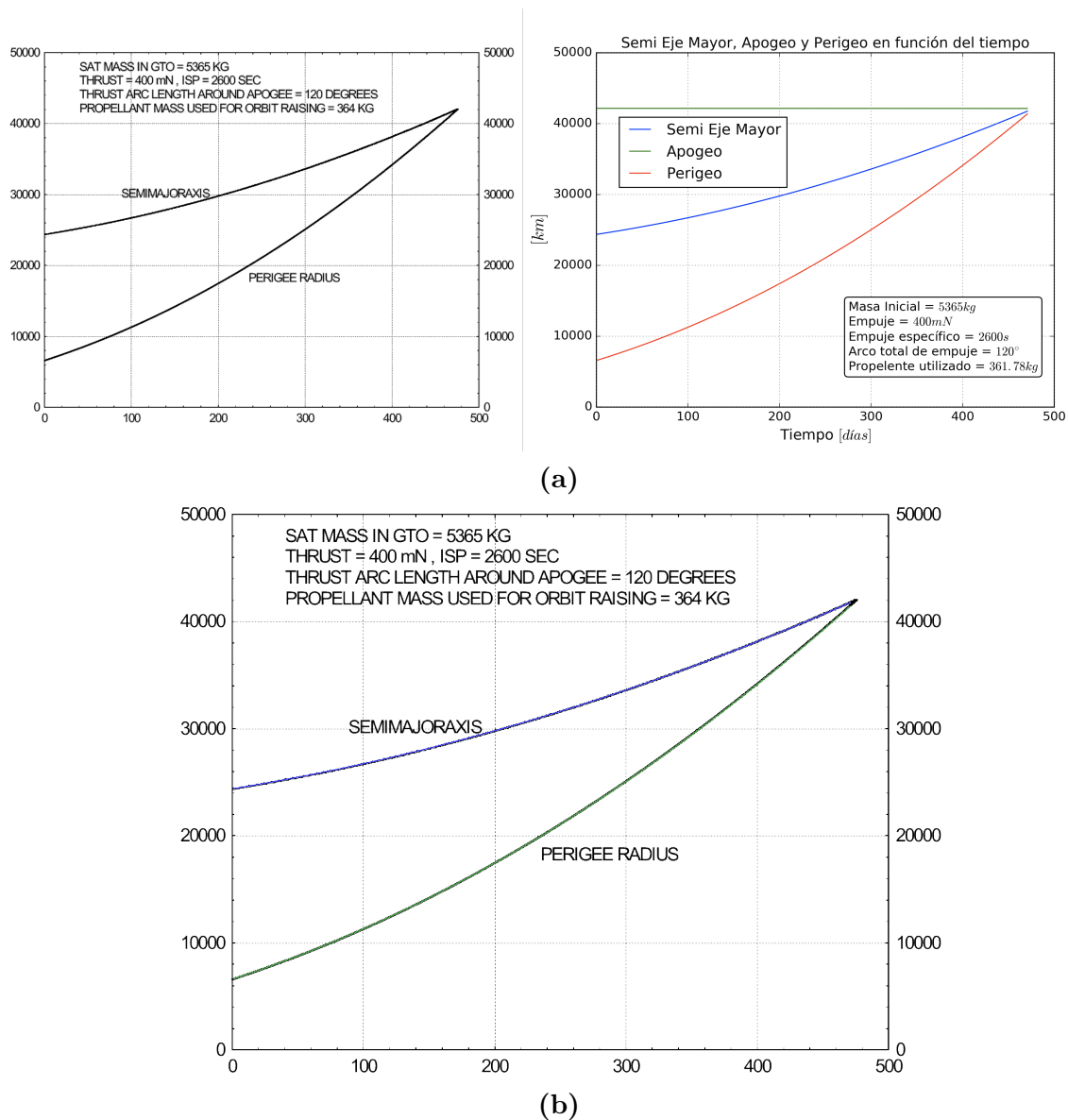
Combinando la ecuación 3.1.2 con las ecuaciones de Gauss para las coordenadas  $\mathcal{RSW}$  se puede deducir la ley de control para el ángulo de propulsión  $\alpha$ . La misma queda expresada como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\tan(\alpha) = -2 \frac{\cot(\nu/2)}{[1 + e \cos(\nu)]} [1 - e \sin^2(\nu/2)] \quad (3.1.3)$$

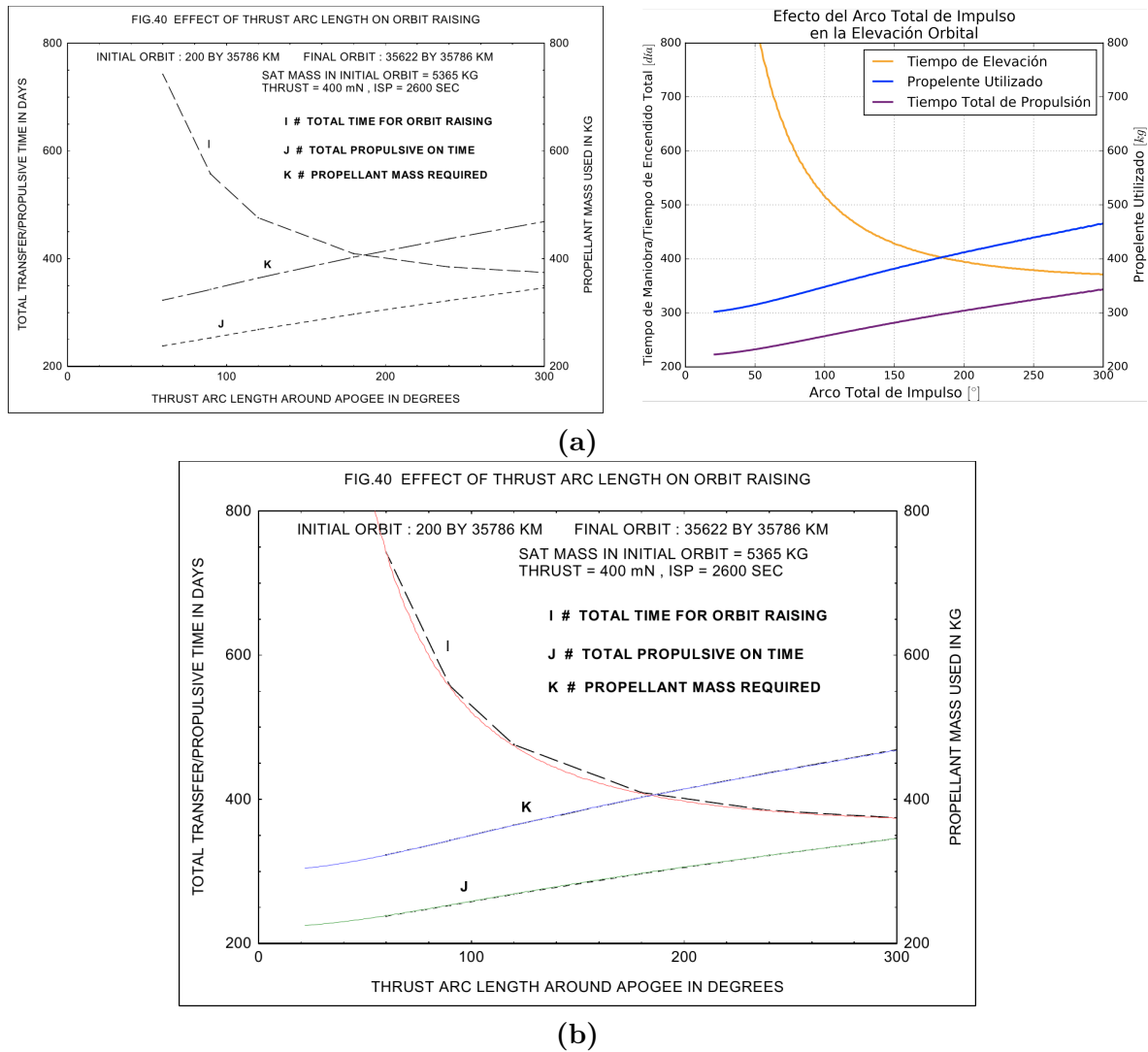
Utilizando la ley de control de la ecuación 3.1.3 y eligiendo un arco de propulsión alrededor del apogeo, Gopinath transfiere un satélite de 5365 Kg de GTO a GEO. El arco de propulsión se elige en grados de anomalía verdadera alrededor del apogeo. Es decir, si se eligieran, por ejemplo, 60° de arco de propulsión, los propulsores se encenderían 30° antes del apogeo y apagarían 30° después de este. Para esta simulación no se tiene en cuenta ningún tipo de perturbación externa al sistema del satélite. Además, debe tenerse en cuenta otras características del satélite como el impulso específico (2600 s) y el empuje de los propulsores utilizados (400 mN).

En la figura 3.1 pueden observarse los resultados de la simulación ejecutada con CUSOI y la resuelta por Gopinath para un arco de propulsión de 120°. Observando la misma, no se pueden distinguir diferencias entre los comportamientos de los algoritmos. Se concluye que el código de este trabajo valida las ecuaciones planares ( $\frac{da}{dt}$  y  $\frac{de}{dt}$ ) frente a la bibliografía propuesta. Para extender el alcance de esta validación, también

se reproducen los resultados que estudia Gopinath respecto a la influencia del arco de propulsión en el tiempo de transferencia. Los mismos pueden verse en la figura 3.2, donde tampoco se pueden apreciar diferencias en los comportamientos de los sistemas. Es importante notar que, además de las ecuaciones planares, al reproducir estos resultados también se puede validar el comportamiento del cálculo de masa utilizado en la transferencia.



**Figura 3.1:** comparación de las curvas de evolución del perigeo, apogeo y semi eje mayor para las simulaciones ejecutadas en Cusoi (derecha) y por Gopinath (izquierda). En (a) se encuentran las curvas originales y en (b) se realizó una superposición de las curvas escaladas de manera de poder ser comparables. Esto permite discernir si existen diferencias entre los diferentes resultados.



**Figura 3.2:** comparación del efecto del arco de propulsión en el resultado de la estrategia. En (a) se encuentran los resultados originales realizados con Cusoi (derecha) y por Gopinath (izquierda), y en (b) se realizó una superposición de las curvas escaladas de manera de poder ser comparables. En la comparación se puede observar la diferencia en la cantidad de puntos utilizados para generar las curvas: con Cusoi se simuló una vez por valor entero de grado desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ .

### 3.2. Validación en 3D; Programa Comercial

Para la siguiente comparación se utiliza un código de propagación comercial: Systems Tool Kit (STK) de la empresa AGI. En dicho programa, se prueban dos estrategias simples de corta duración, las cuales se utilizan para comparar los resultados finales de ambos sistemas. Las estrategias comparadas fueron: una de propulsión tangencial y otra de propulsión fuera de plano. Éstas, permiten comenzar a validar las ecuaciones fuera de las ecuaciones planares. Las variables a comparar al final de las simulaciones serán todos los elementos orbitales y la masa final. Se utiliza para estos escenarios un satélite de 1.000 Kg, con un impulso específico de 1.600 segundos y un empuje en los



propulsores de 160 mN. Se tiene en cuenta la perturbación debido a la no esfericidad de la tierra (J2) en las simulaciones.

## Estrategia Tangencial

El primero de los casos a validar utiliza un programa de propulsión tangencial que comienza en el apogeo de la órbita inicial y termina 10 revoluciones después en el apogeo. Se espera que los cambios más importante se den en el semieje mayor y en la excentricidad. Además se esperan cambios menores en el argumento de perigeo y en el nodo de ascenso debido a las perturbaciones.

**Tabla 3.1:** tabla comparativa de los valores de las simulaciones en CUSOI y STK de la estrategia de propulsión tangencial. El comienzo de la propulsión se realiza en el apogeo y dura 10 revoluciones. La tabla se divide en dos partes: absoluto e incremental. En *absoluto*, se muestran los valores finales de los parámetros para las dos simulaciones y se hace una comparación de las diferencias porcentuales entre las mismas. En *incremental*, se muestran los cambios en las variables en los dos códigos y además se hace una comparación absoluta de las cantidades.

Absoluto				
Magnitud	Valor Inicial	Valor Final		Dif [%]
		CUSOI	STK	
Semi Eje Mayor [Km]	24.396,383	25.044,100	25.046,530	+0,009703
Excentricidad [1]	0,728202	0,721306	0,721302	-0,000433
Inclinación [°]	5,984	5,984	5,982	-0,040249
Nodo de Ascenso [°]	346,541	-15,358	-15,184	-1,144474
Argumento de Perigeo [°]	179,356	-176,883	-177,222	+0,191446
Masa [Kg]	1.000,000	996,064	996,057	-0,000711
Incremental				
Magnitud	Valor Inicial	Incremento		Dif [Abs]
		CUSOI	STK	
Semi Eje Mayor [Km]	24.396,383	+647,716	+650,146	-2,430
Excentricidad [1]	0,728202	-0,006897	-0,006900	+0,000003
Inclinación [°]	5,984	-0,000	-0,002	+0,002
Nodo de Ascenso [°]	346,541	-1,899	-1,725	-0,173
Argumento de Perigeo [°]	179,356	+3,760	+3,421	+0,339
Masa [Kg]	1.000,000	-3,936	-3,943	+0,007

Para realizar la simulación hubo que realizar una consideración especial. Como CUSOI integra una vuelta a la vez desde el perigeo, fue necesario configurar una simulación de 11 revoluciones donde la primera y última mitad de las mismas tengan los propulsores apagados. De esta manera se pudo imitar el escenario planteado en el programa

comercial. Sin embargo, esto induce diferencias en el cambio en el argumento de perigeo y nodo de ascenso. Esto, se debe a que en CUSOI se integran la perturbación de J2 durante 11 revoluciones cuando STK lo hace sólo en 10. En la tabla 3.1 se muestran las condiciones iniciales y finales para ambos códigos. En la misma se puede corroborar el comportamiento esperado. Los cambios más grandes existieron en el semi eje mayor y la excentricidad, y las diferencias más grandes entre los códigos se dieron en el nodo de ascenso y el argumento de perigeo.

La validación para esta estrategia se considera satisfactoria ya que, aún en las variables donde se producen los cambios más grandes, hay diferencias despreciables en las cantidades cambiadas entre los códigos. Notar que hay sólo una diferencia en el cambio del semi eje mayor de alrededor de 2,5 Km en unos 650 Km de cambio. El cambio de la excentricidad es aún más similar.

## Estrategia Fuera de Plano

El segundo escenario planteado en el código comercial es similar al de la estrategia tangencial ya que utiliza el mismo satélite, mismas reglas de encendido y apagado de propulsión y mismas condiciones iniciales. La diferencia entre estos es que el segundo utiliza una dirección de propulsión distinta: propulsión en dirección sur del plano orbital (contraria al vector momento angular) sin componente tangencial. En este escenario, se espera que el cambio más significativo se dé en la inclinación. Además, la propulsión en esta dirección afectará los resultados del argumento de perigeo y nodo de ascenso respecto del caso anterior.

En la tabla 3.2 se muestran los resultados obtenidos en las simulaciones de los dos códigos. Puede observarse, como era de esperar, que la inclinación se redujo alrededor de  $1,4^\circ$  y que los cambios en argumento de perigeo y nodo de ascenso son distintos del caso anterior.

Los resultado de la validación se consideran satisfactorios. Es importante agregar, que esta validación fue más completa que en el caso de Gopinath ya que envolvió las ecuaciones para todos los elementos orbitales. Además, el código muestra su versatilidad de adaptación al reproducir un escenario distinto al de Gopinath con mínimo esfuerzo de adaptación.

**Tabla 3.2:** tabla comparativa de los valores de las simulaciones en CUSOI y STK de la estrategia con propulsores apuntando al sur sin componente tangencial. El comienzo de la propulsión es como en el caso anterior: comienza en el apogeo y dura 10 revoluciones. La tabla se divide en dos partes: absoluto e incremental. En *absoluto*, se muestran los valores finales de los parámetros para las dos simulaciones y se hace una comparación de las diferencias porcentuales entre las mismas. En *incremental*, se muestran los cambios en las variables en los dos códigos y además se hace una comparación absoluta de las cantidades.

Absoluto				
Magnitud	Valor Inicial	Valor Final		Dif [ %]
		CUSOI	STK	
Semi Eje Mayor [Km]	24.396,383	24.396,384	24.396,383	-0,000003
Excentricidad [1]	0,728202	0,728202	0,728202	+0,000000
Inclinación [°]	5,984	4,610	4,608	-0,072113
Nodo de Ascenso [°]	346,541	-15,692	-15,613	-0,507086
Argumento de Perigeo [°]	179,356	-176,778	-176,708	-0,039890
Masa [Kg]	1.000,000	996,132	996,133	+0,000019
Incremental				
Magnitud	Valor Inicial	Incremento		Dif [Abs]
		CUSOI	STK	
Semi Eje Mayor [Km]	24.396,383	+0,001	0,000	-0,001
Excentricidad [1]	0,728202	0,000000	0,000000	0,000000
Inclinación [°]	5,984	-1,373	-1,376	+0,003
Nodo de Ascenso [°]	346,541	-2,235	-2,154	-0,079
Argumento de Perigeo [°]	179,356	+3,866	+3,936	-0,070
Masa [Kg]	1.000,000	-3,867	-3.866	-0,001

### 3.3. Validación en 3D; Pollard [2]

La tercera y última de las validaciones se realizará comparando frente a los resultados de Pollard. Pollard plantea un plan de transferencia que modifica más de una variable al mismo tiempo ejecutando distintas estrategias secuencialmente. Esta transferencia, como la anterior, es tridimensional, o sea, considera los efectos de las fuerzas fuera de plano. Además, como en el caso anterior, también se considera las perturbaciones debido a la no esfericidad de la tierra.

Pollard plantea diversos programas de propulsión. Estos programas, están expresados en componentes de aceleración en los tres ejes del sistema de coordenadas  $\mathcal{RSW}$  en función de la anomalía excéntrica. Es decir, las estrategias vienen expresadas en la siguiente forma:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_R(\varphi) \\ f_S(\varphi) \\ f_W(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

$$|\vec{f}| = f = \sqrt{f_R^2 + f_S^2 + f_W^2}$$

donde  $f$  es el vector aceleración y  $f_i$  es la componente de aceleración en el eje  $i$ .

La componente fuera de plano de todos los programas se calcula de la misma manera: eligiendo un ángulo de propulsión  $\beta$  como el definido en el trabajo. Para la reducción de la inclinación la componente fuera de plano debe apuntar en la dirección en la cuál se encuentre el satélite respecto del plano ecuatorial. Por lo tanto, si el satélite se encuentra en la zona sur del plano ecuatorial, es decir que se encuentra en dirección contraria al eje  $\mathcal{W}$ , la componente  $f_3$  debe apuntar en sentido contrario al eje  $\mathcal{W}$ . Si en cambio el satélite se encuentra en la zona norte del plano ecuatorial, es decir en la dirección positiva del eje  $\mathcal{W}$ , la componente  $f_3$  debe apuntar en dirección norte. Esto se expresa como:

$$f_3 = f \cdot \sin(\beta) \quad (3.3.2)$$

Las componentes  $f_1$  y  $f_2$  se calculan según el programa elegido. En todos los casos esto se hace “repartiendo” la componente de la aceleración dentro del plano,  $f_{RS}$ , entre los ejes  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{W}$ . La componente planar se puede calcular como:

$$f_{RS} = f \cdot \cos(\beta) \quad (3.3.3)$$

Los programas competentes para el caso elegido son dos de los cuatro planteados por Pollard. El primero de ellos se centra en aumentar el semi eje mayor a medida que disminuye la excentricidad. Notar que, a su vez se reduce la inclinación si el ángulo  $\beta$  elegido no es nulo. El segundo de los programas se centra en la reducción de la excentricidad sin modificar el semi eje mayor. A continuación se expresan las estrategias en función de la anomalía excéntrica:

Primera estrategia: (3.3.4)

$$\begin{aligned} f_R &= 0 \\ f_S &= f_{RS} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Segunda estrategia: (3.3.6)

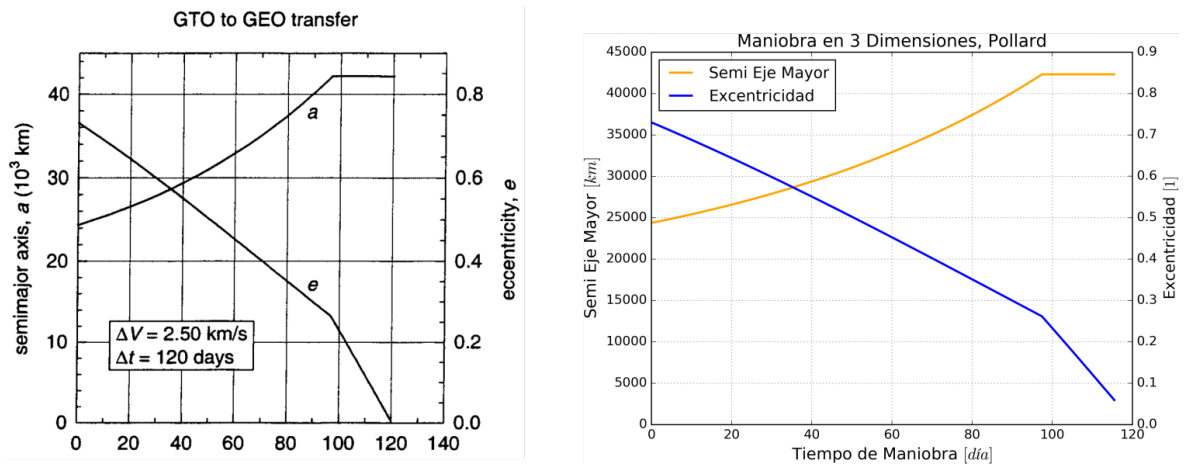
$$\begin{aligned} f_R(\varphi) &= \frac{f_{RS} \sqrt{1 - e^2} \sin(\varphi)}{1 - e \cos(\varphi)} \\ f_S(\varphi) &= \frac{f_{RS} [\cos(\varphi) - e]}{1 - e \cos(\varphi)} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Las condiciones iniciales para la transferencia son: un perigeo de 185 Km de altitud y un apogeo de 35.786 Km de altitud, lo cuál supone un semi eje mayor de 24,364 Km con excentricidad 0,73, una inclinación de 28,5 ° y una fuerza de empuje en los propulsores tal que el módulo de aceleración es  $10^{-4} Km/s^2$ . La aceleración constante indica que no se toma en cuenta la pérdida de masa para este estudio.

La primera de las estrategias se implementa durante 97 días en arcos de encendido de 216°, medidos en anomalía excéntrica, alrededor del apogeo con  $\beta = +40,4^\circ$ . Esta primera parte, aumenta el semi eje mayor hasta el objetivo de 42.164 Km. La segunda de las estrategias se aplica durante 23 días más de manera continua, hasta reducir la excentricidad y la inclinación a cero, con  $\beta = \pm 26,0^\circ$ .

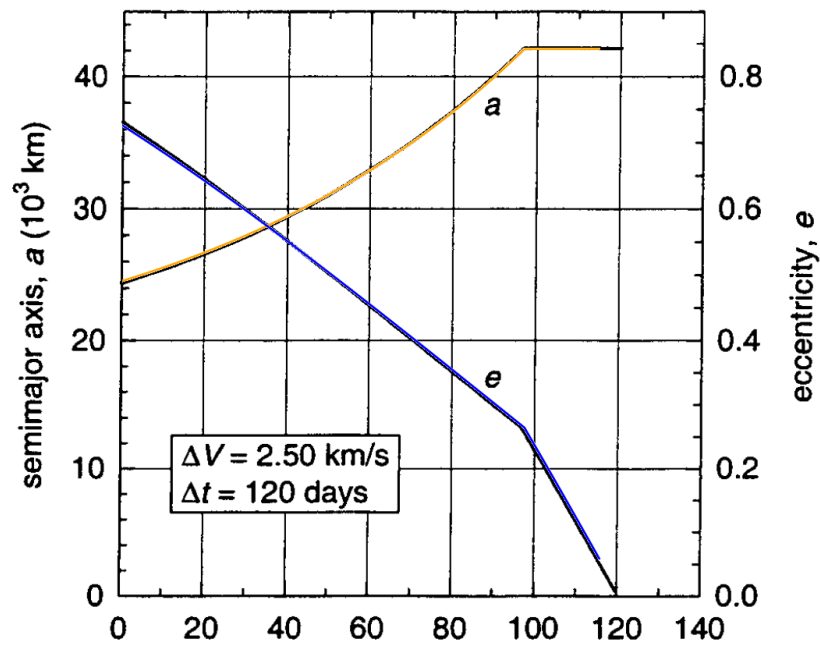
Es interesante mencionar que los modelos de perturbaciones de Pollard son los mismos que los utilizados en este trabajo. Sin embargo, el método de integración es distinto ya que Pollard utiliza el método de promediado orbital con propagación en pasos temporales. En cambio, CUSOI actualiza los parámetros orbitales revolución a revolución.

En las figuras 3.3 y 3.4 se pueden observar los resultados de la simulación con la utilización de la estrategia planteada por Pollard. La validación se considera satisfactoria ya que no se encuentran diferencias apreciables en las curvas de evolución del semi eje mayor, la excentricidad y la inclinación. Las diferencias existentes en el nodo de ascenso y el argumento a perigeo se consideran despreciables.



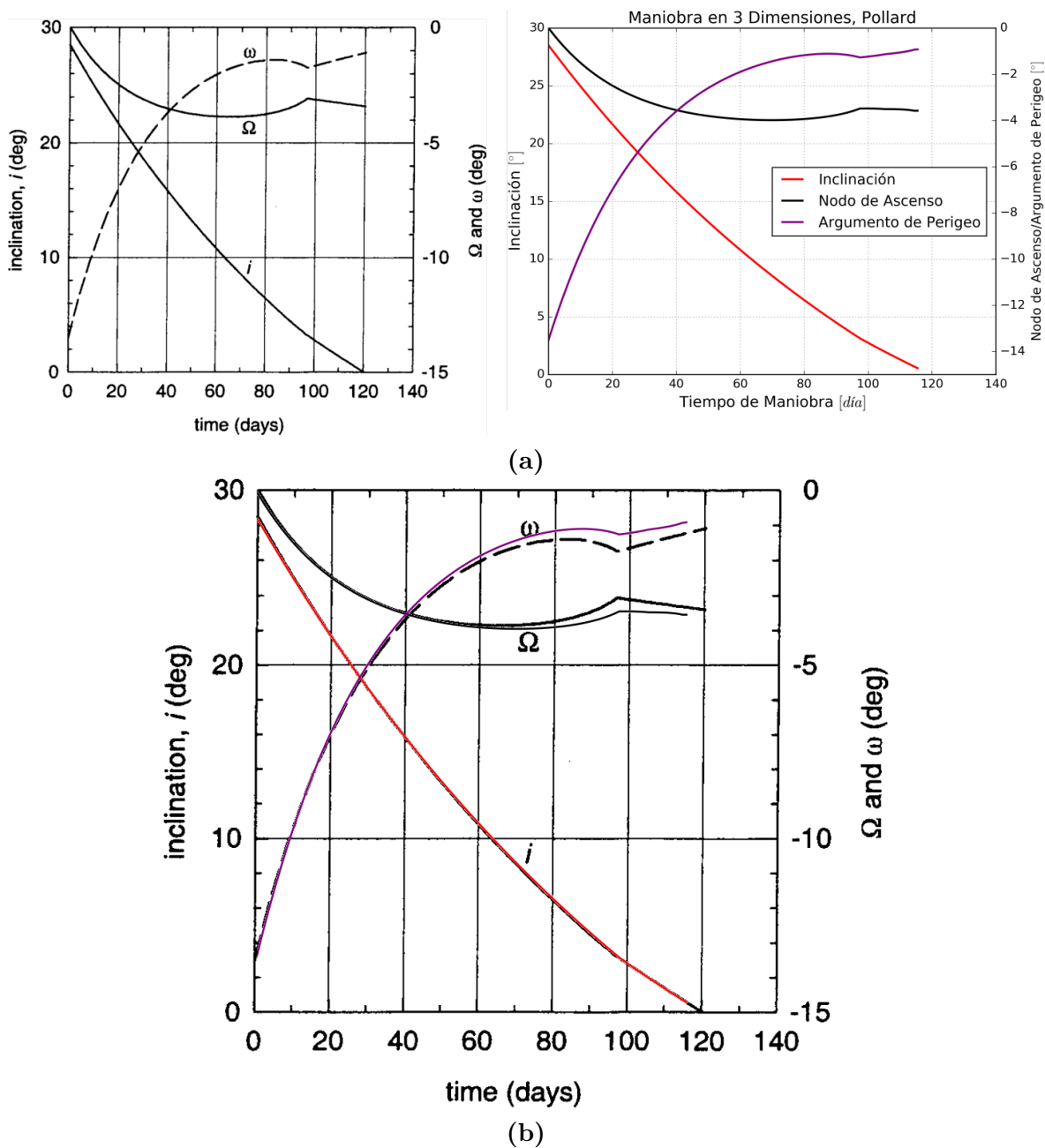
(a)

GTO to GEO transfer



(b)

**Figura 3.3:** comparación de la evolución del semi eje mayor y la excentricidad para la validación de los parámetros en tres dimensiones. En (a) se puede observar a la izquierda los resultados de Pollard y a la derecha los resultados obtenidos con Cusoi para la misma estrategia. Para ser comparables estas curvas se escalan los resultados obtenidos con Cusoi y se superponen las curvas para poder analizar la similitud de los casos (b).



**Figura 3.4:** comparación de la evolución de la inclinación, del nodo de ascenso y del argumento de perigeo para la validación de los parámetros en tres dimensiones. En (a) se puede observar a la izquierda los resultados de Pollard y a la derecha los resultados obtenidos con Cusoi para la misma estrategia. Para ser comparables estas curvas se escalan los resultados obtenidos con Cusoi y se superponen las curvas para poder analizar la similitud de los casos (b).





# Capítulo 4

## Optimización y Análisis de Casos

Una vez realizada la validación de la física del sistema en el capítulo 3, se utilizó al mismo para resolver distintos casos de optimización. Con el objetivo de resolver dichos casos, fue necesario parametrizar la estrategia del satélite, es decir la dirección de propulsión del mismo durante la transferencia orbital. Una vez parametrizado el problema, se utilizaron herramientas de optimización junto al propagador desarrollado en este trabajo para resolver los casos que se presentan en este capítulo.

### 4.1. Parametrización

Siguiendo el desarrollo propuesto por Kluever [4], se parametrizaron los ángulos de propulsión según las ecuaciones que derivan de aplicar las condiciones necesarias para teoría de control óptimo. Es importante aclarar que la estructura derivada de la utilización de la teoría de control óptimo no pretende plantear un problema a resolver con condiciones de borde. Ésta, se utiliza únicamente para parametrizar la dirección de empuje del satélite de manera eficiente.

Con el fin de realizar dicha parametrización, se comienza calculando el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  para el problema de control óptimo. El mismo se define como:

$$\mathcal{H}(\vec{x}_{(t)}, \vec{u}_{(t)}, \lambda_{(t)}, t) = \vec{\lambda}_{(t)}^T \vec{f}(\vec{x}_{(t)}, \vec{u}_{(t)}, t) + \mathcal{L}(\vec{x}_{(t)}, \vec{u}_{(t)}, \vec{\lambda}_{(t)} t) \quad (4.1.1)$$

donde  $\vec{f}$  representa el vector de tasas de cambio de las variables de estado del sistema y  $\mathcal{L}$  representa el lagrangiano del problema en caso de existir restricciones dinámicas. Para la resolución de este problema se introduce el vector de co-estados  $\vec{\lambda}$ . En nuestro caso, las variables de estado del sistema  $\vec{x}$  son los parámetros orbitales clásicos representados en la ecuación 1.3.71. El vector  $\vec{u}$  representa las variables de entrada del sistema, que en este caso, son los ángulos de dirección de la propulsión  $\alpha$  y  $\beta$ . Si existieran restricciones dinámicas  $\vec{g}$  en el sistema, las mismas se introducirían al mismo en la ecuación del lagrangiano como:

$$\mathcal{L}(\vec{x}_{(t)}, \vec{u}_{(t)}, \lambda_{(t)}, t) = f(\vec{x}_{(t)}, \vec{u}_{(t)}, t) - \vec{\lambda}_{(t)}^T \vec{g}(\vec{x}_{(t)}, \vec{u}_{(t)}, t) \quad (4.1.2)$$

Como no existen restricciones dinámicas en el sistema, el hamiltoniano se puede expresar como:

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \lambda_a \frac{da}{dt} + \lambda_e \frac{de}{dt} + \lambda_i \frac{di}{dt} \quad (4.1.3)$$

donde el vector de co-estados  $\vec{\lambda}$  queda definido de la siguiente manera:

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_a & \lambda_e & \lambda_i \end{bmatrix}^T \quad (4.1.4)$$

Ha de notarse que se realizó el calculo del hamiltoniano en la ecuación 4.1.3 tomando en cuenta solamente tres variables del sistema: el semi eje mayor  $a$ , la excentricidad  $e$  y la inclinación  $i$ . Esto se debe a que los problemas de optimización que se resuelven sólo fijan valores objetivos para estas tres variables, sin tener en cuenta la evolución de las restantes variables. Las tasas de cambio de las tres variables influyentes en el problema,  $a$ ,  $e$  e  $i$ , se calculan de las correspondientes ecuaciones de Gauss expresadas en las fórmulas 1.3.77 y 1.3.78 de acuerdo al sistema de coordenadas en el que se este trabajando. En nuestro caso se trabajó con el sistema de coordenadas  $\mathcal{NTH}$ . Las aceleraciones expresadas en dichas fórmulas,  $a_n$ ,  $a_t$  y  $a_h$  se computan a partir de los ángulos de dirección de propulsión de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a_n & a_t & a_h \end{bmatrix}^T = a_T \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \cos(\beta) & \cos(\alpha) \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{bmatrix}^T = a_T \vec{u} \quad (4.1.5)$$

donde  $a_T$  es la aceleración debida al empuje del propulsor y  $\alpha$  y  $\beta$  fueron definidas en la figura 2.3. La aceleración debida al empuje del propulsor es igual a la relación entre el empuje del propulsor  $T$ , definido en la ecuación 1.3.81, y la masa instantánea del satélite  $m$ . En cada simulación los propulsores se suponen encendidos en todo momento que sea posible, es decir, cuando el satélite se encuentra expuesto a la luz del sol. Esto se debe al gran consumo eléctrico de los propulsores de ascenso los cuáles sólo se pueden prender cuando existe un aporte de energía externo constante. En consecuencia, es necesario conocer si el satélite se encuentra expuesto al sol en todo momento de la simulación. Para esto, se comprueba durante toda la simulación si el satélite tiene visión del sol sin ser interrumpido por la tierra.

Para encontrar las leyes de control que permitan parametrizar el problema, es necesario encontrar las condiciones óptimas del problema de control. Esto se realiza encontrando las derivadas parciales del hamiltoniano respecto de cada variable de entrada del problema y reemplazando las ecuaciones de las tasas de cambio 1.3.78a, 1.3.78b y

1.3.78c en 4.1.3. El valor óptimo de  $\alpha$  se obtiene derivando  $\mathcal{H}$  respecto de  $\alpha$  e igualando a cero. Así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = & -\lambda_a \frac{2a^2 v}{\mu} a_T \sin(\alpha) \cos(\beta) + \\ & + \lambda_e \frac{a_T}{v} \left\{ -2[e + \cos(\nu)] \sin(\alpha) + \frac{r}{a} \sin(\nu) \cos(\alpha) \right\} \cos(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Despejando  $\alpha$  de la ecuación 4.1.6 se obtiene la siguiente expresión:

$$\tan(\alpha^*) = \frac{\lambda_e \frac{r}{a} \sin(\nu)}{2 \left\{ \lambda_a \frac{a^2 v^2}{\mu} + \lambda_e [e + \cos(\nu)] \right\}} \quad (4.1.7)$$

donde  $\alpha^*$  es el valor óptimo de  $\alpha$  para el problema planteado. La resolución de la ecuación 4.1.7 da como resultado dos valores posibles para  $\alpha$ , debido a la naturaleza de la función tangente. Para poder conocer cuál de estos valores es válido, es necesario calcular la derivada parcial segunda del hamiltoniano respecto de  $\alpha$  y considerar que la teoría de control óptimo establece que la mejor solución se encuentra en el mínimo de  $\mathcal{H}$ . Esto equivale a la siguiente expresión:  $\partial^2 \mathcal{H} / \partial \alpha^2 > 0$ . El análisis de la derivada parcial segunda nos lleva a las siguientes expresiones:

$$\sin(\alpha^*) = \frac{-\lambda_e \frac{r}{a} \sin(\nu)}{\sqrt{4 \left\{ \lambda_a \frac{a^2 v^2}{\mu} + \lambda_e [e + \cos(\nu)] \right\}^2 + \lambda_e^2 \frac{r^2}{a^2} \sin^2(\nu)}} \quad (4.1.8a)$$

$$\cos(\alpha^*) = \frac{-2 \left\{ \lambda_a \frac{a^2 v^2}{\mu} + \lambda_e [e + \cos(\nu)] \right\}}{\sqrt{4 \left\{ \lambda_a \frac{a^2 v^2}{\mu} + \lambda_e [e + \cos(\nu)] \right\}^2 + \lambda_e^2 \frac{r^2}{a^2} \sin^2(\nu)}} \quad (4.1.8b)$$

Repetiendo la misma deducción para el valor de  $\beta^*$  se calcula la derivada parcial de  $\mathcal{H}$  respecto de  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} = & -\lambda_a \frac{2a^2 v}{\mu} a_T \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ & - \lambda_e \frac{a_T}{v} \left\{ 2[e + \cos(\nu)] \cos(\alpha) + \frac{r}{a} \sin(\nu) \sin(\alpha) \right\} \sin(\beta) \\ & + \lambda_i \frac{a_T r}{h} \cos(\omega + \nu) \cos(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

De esta expresión a su vez se despeja el valor óptimo de  $\beta$ .

$$\tan(\beta^*) = \frac{\lambda_i \frac{rv}{h} \cos(\omega + \nu)}{\lambda_a \frac{2a^2 v^2}{\mu} \cos(\alpha^*) + \lambda_e \left\{ 2[e + \cos(\nu)] \cos(\alpha^*) + \frac{r}{a} \sin(\nu) \sin(\alpha^*) \right\}} \quad (4.1.10)$$

De la misma manera que en el caso anterior se analizó el resultado de la segunda derivada del Hamiltoniano para conocer el cuadrante de ángulo  $\alpha^*$ , en este caso se analiza  $\partial \mathcal{H} / \partial \beta^2$  bajo las mismas condiciones y se obtiene como resultado:

$$\sin(\beta^*) = \frac{-\lambda_i \frac{rv}{h} \cos(\omega + \nu)}{d} \quad (4.1.11a)$$

$$\cos(\beta^*) = \frac{-\lambda_a \frac{2a^2 v^2}{\mu} \cos(\alpha^*) - \lambda_e \left\{ 2[e + \cos(\nu)] \cos(\alpha^*) + \frac{r}{a} \sin(\nu) \sin(\alpha^*) \right\}}{d} \quad (4.1.11b)$$

Donde:

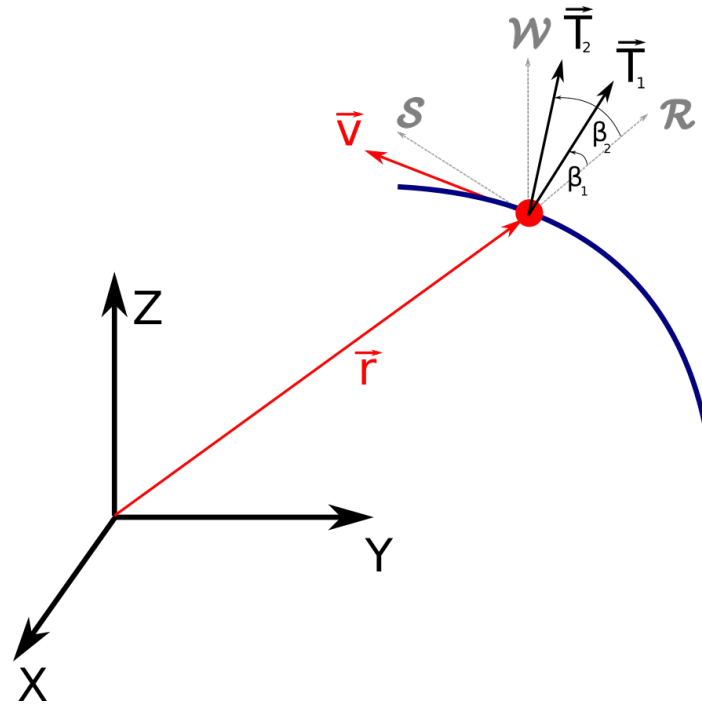
$$d = \left\{ \left[ \lambda_i \frac{rv}{h} \cos(\omega + \nu) \right]^2 + \left[ \lambda_a \frac{2a^2 v^2}{\mu} \cos(\alpha^*) \right]^2 + \lambda_e^2 \left\{ 2[e + \cos(\nu)] \cos(\alpha^*) + \frac{r}{a} \sin(\nu) \sin(\alpha^*) \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Desde el punto de vista numérico es importante observar que es necesario resolver primero los valores de  $\alpha^*$  para poder calcular los valores de  $\beta^*$  ya que este valor depende del anterior. Esto establece pautas importantes para el orden de los cálculos.

Para esta estructura de parametrización los elementos del vector de co-estados  $\vec{\lambda}$  funcionan como valores de peso para las variables objetivo. Como resultado de esto, el comportamiento del sistema no depende del valor absoluto de estas variables de peso, sino, que depende del valor relativo que las mismas posean entre ellas. Es decir que es posible obtener un mismo comportamiento del sistema con distintos valores de  $\vec{\lambda}$ , siempre y cuando la relación entre los elementos se mantenga constante. Además, el signo de estas variables de peso indican si la variable relacionada al co-estado aumentará o disminuirá siguiendo el camino planteado por la ley de control óptimo. Si la variable de peso es negativa, la variable relacionada aumentará, y si es positiva, disminuirá.

Es útil para el análisis futuro de los resultados describir ciertas relaciones entre

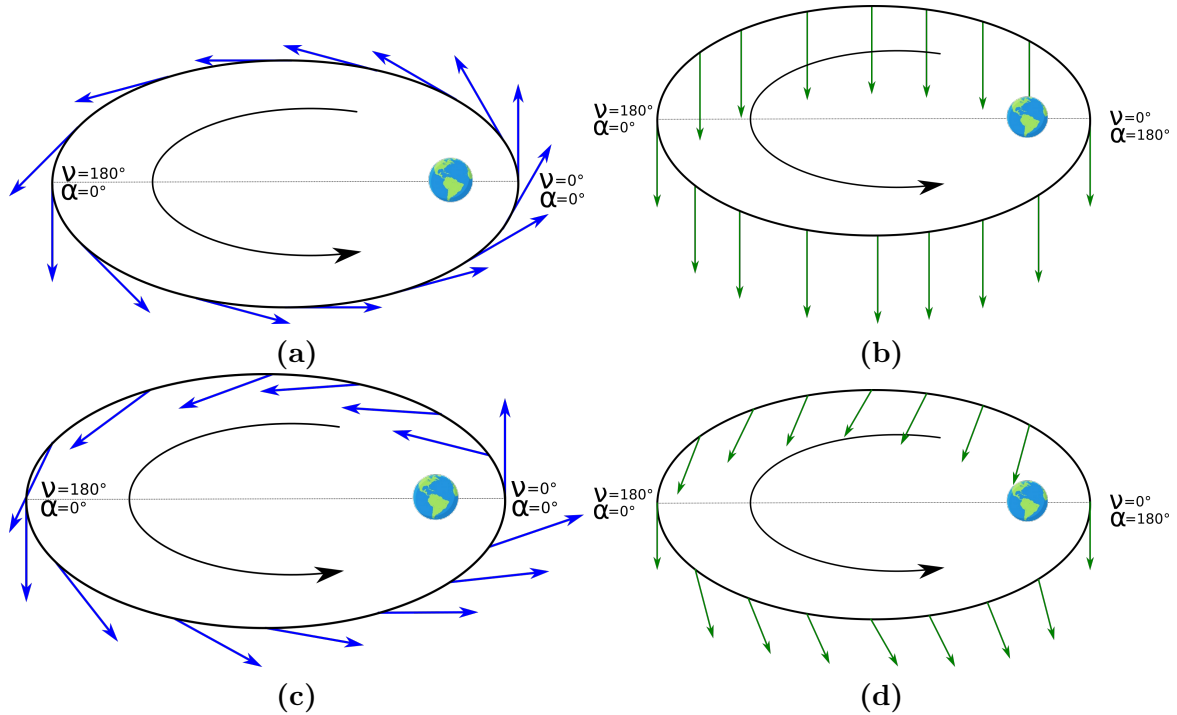
los co-estados y los valores de los ángulos de propulsión, y entre los valores de los ángulos de propulsión y los cambios en los elementos orbitales. El valor del co-estado  $\lambda_i$  influencia directamente el valor del ángulo de propulsión fuera de plano  $\beta$ . Este, a su vez, influencia únicamente una de las variables de interés del problema: la inclinación. Esto, se debe a que la inclinación se ve afectada únicamente por la aceleración fuera de plano (eje  $\mathcal{H}$ ), como se puede observar en las ecuaciones de Gauss para elementos orbitales, y que la aceleración fuera de plano depende del valor de  $\beta$  (ecuación 4.1.5). Hay una directa relación entre el ángulo máximo que alcanza  $\beta$  en una revolución dada y la tasa de cambio de la inclinación, lo cual se corroborará en los resultados de las optimizaciones.



**Figura 4.1:** representación de dos ángulos de propulsión  $\beta$  distintos. Si  $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$ , y  $\beta_2 > \beta_1$ , entonces la tasa de cambio  $\frac{di}{dt}$  es más grande para el caso donde se emplea  $\beta_2$ . A mayores ángulos de  $\beta$  empleados en una transferencia, más rápidos serán los cambios en la inclinación.

Otro resultado útil del análisis de los co-estados, es la relación entre el ángulo máximo  $\alpha$  en una dada transferencia y la razón entre los co-estados  $\lambda_a a$  y  $\lambda_e$ . Si  $\lambda_a a \gg \lambda_e$ , el programa de propulsión resultante será uno en donde se maximiza la tasa de cambio promedio del parámetro  $a$ . Dicho programa ocurre con  $\alpha = 0$  para tasa de cambio positiva ( $\lambda_a a < 0$ ) o con  $\alpha = 180^\circ$  para tasa de cambio negativa ( $\lambda_a a > 0$ ). Si en cambio,  $\lambda_a a \ll \lambda_e$ , el programa resultante maximizará la tasa de cambio promedio del parámetro de excentricidad  $e$ . El programa que maximiza la tasa de cambio promedio en la excentricidad, es uno tal que la dirección del vector aceleración se mantiene constante en el sistema de coordenadas inercial, y el mismo apunta en la misma dirección que el vector velocidad en el apogeo, si la tasa de cambio es negativa ( $\lambda_e > 0$ ), o en la misma

dirección que el vector velocidad en el perigeo si la tasa de cambio es positiva ( $\lambda_e < 0$ ). Notar que si el programa maximiza el cambio en el parámetro  $e$ ,  $\alpha$  debe poder tomar valores entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ , lo que indicará que el valor máximo alcanzado en ese ángulo de propulsión para esa revolución es  $180^\circ$ . Si en cambio las magnitudes de los valores de  $\lambda_a a$  y  $\lambda_e$  son similares, el comportamiento resultante será una combinación de los dos comportamientos anteriormente descritos. Para este tipo de programas, existe un valor crítico de la razón entre los co-estados  $K$ , que es particular para cada caso, para el cuál el esfuerzo de propulsión se avoca más hacia cambiar  $a$  ( $\frac{\lambda_e}{\lambda_a a} < K$ ) o hacia cambiar  $e$  ( $\frac{\lambda_e}{\lambda_a a} > K$ ). Esto se ve reflejado en la dirección resultante del impulso en el apogeo y perigeo. Si la dirección de impulso en el apogeo y perigeo es la misma (por ejemplo:  $\alpha = 0^\circ$  para  $\nu = 0^\circ$ , y  $\alpha = 180^\circ$  para  $\nu = 180^\circ$ ),  $K > \frac{\lambda_e}{\lambda_a a}$ , ya que esto maximizará la tasa de cambio promedio en  $e$ . En cambio, si las direcciones de propulsión en el perigeo y apogeo son opuestas ( $\alpha = 0^\circ$  para  $\nu = 0^\circ$  y para  $\nu = 180^\circ$ ), o sea que tienen la misma dirección que la velocidad, entonces  $K < \frac{\lambda_e}{\lambda_a a}$ , ya que esto maximizará la tasa de cambio promedio en  $a$ . En la figura 4.2 se pueden observar los comportamientos anteriormente descritos de manera gráfica.



**Figura 4.2:** comportamiento del ángulo de propulsión  $\alpha$  en el plano orbital. Esta figura engloba los casos donde  $\lambda_a a \gg \lambda_e$  (a),  $\lambda_a a \ll \lambda_e$  (b),  $\frac{\lambda_e}{\lambda_a a} < K$  (c) y  $\frac{\lambda_e}{\lambda_a a} > K$  (d). Observar que en los casos donde la razón de los co-estados supere los valores críticos, el ángulo  $\alpha$  necesita alcanzar los  $180^\circ$ . En los casos donde la razón de los co-estados no supera el valor crítico, el valor máximo de  $\alpha$  es menor a  $180^\circ$  y depende de la relación entre  $\lambda_e$  y  $\lambda_a a$ .

Se puede encontrar un análisis más detallado del comportamiento de estas variables de peso en la referencia [4].

## 4.2. Descripción de Misión

Cada vez que se optimice se estará buscando la mejor solución para la realización de una misión. Es por esto, que es necesario saber qué parámetros caracterizan una misión. Normalmente se conocen las condiciones iniciales en forma de vector de parámetros clásicos promediados extendido (de aquí en adelante “*vector de parámetros*”) y se desea llegar a ciertas condiciones mínimas que dan a la misión como finalizada. En este trabajo estas condiciones mínimas son valores para los primeros tres elementos del vector de parámetros. Es decir que existe un vector inicial  $\delta\vec{r}_{R0}$  y se desean llegar a valores finales  $a_f$ ,  $e_f$  e  $i_f$ . Además se debe tener en cuenta otras características de la misión: la fecha de inicio y la potencia, eficiencia, empuje total e impulso específico de los propulsores. Para este trabajo se considera que todos los propulsores poseen un empuje específico constante. Aún así, la herramienta de propagación se encuentra preparada para resolver casos donde el empuje específico depende con alguna función del grado de actuación de los propulsores.

De esta manera se podría describir una misión de manera compacta con la siguiente tabla:

**Tabla 4.1:** Ejemplo de Tabla de Misión.

Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	6,927	42,164	Km
Excentricidad	$e$	0	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	0	—	°
Masa	$m$	1,200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	10		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	65		%
Impulso específico	$Isp$	3,300		$s$
Fecha de Inicio: 01/01/2000 00:00:00				

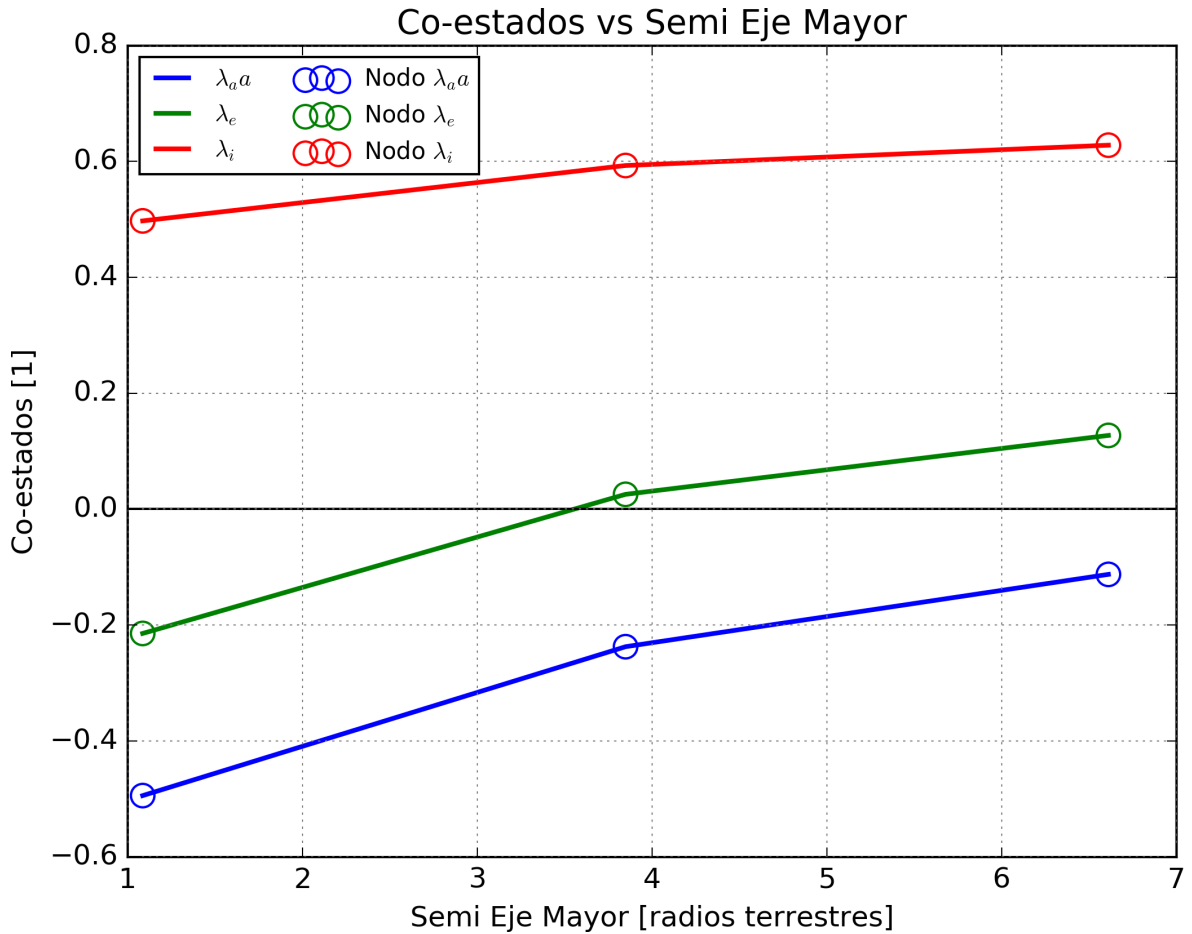
A la tabla 4.1 se la llamará *Tabla de Misión* y en ella se pueden observar todos los datos necesarios para realizar la optimización. De aquí en adelante se utilizará este tipo de tablas para describir las condiciones de las misiones a optimizar. La herramienta de propagación utiliza los datos de la tabla para propagar la evolución del satélite. Si los datos originales de la misión estuvieran expresados en otras variables o de otra

manera, es necesario transformarlos para que igualen los datos requeridos en la Tabla de Misión.

### 4.3. Optimización

Para la realización de la optimización es necesario elegir una función de costo a optimizar. Esta función de costo  $\mathcal{J}$  se define para cada problema en particular dependiendo de lo que se desee optimizar.

Las variables libres provienen de la parametrización de los valores  $\lambda_a a(a)$ ,  $\lambda_e(a)$  y  $\lambda_i(a)$ . Dicha parametrización se realiza interpolando linealmente entre nodos distribuidos equitativamente entre el semieje mayor inicial  $a_0$  y el semieje mayor objetivo  $a_f$ . Es decir,  $a \in [a_0, a_f]$ . Estos nodos son las variables libres de optimización. Es decir, como resultado de la optimización de una misión se obtendrá un conjunto de valores de nodos que resuelven el problema. En la figura 4.3 se puede observar un ejemplo de como se obtienen los valores de co-estados utilizando la parametrización elegida.



**Figura 4.3:** co-estados de un dado problema ejemplo en función del semieje mayor. Los nodos circulares representan las variables libres del problema de optimización. El valor del co-estado correspondiente se obtiene de la interpolación entre estos nodos distribuidos equitativamente entre el semieje mayor inicial y final.



Siguiendo lo recomendado por la referencia [4] se utilizó la función de optimización '*fmin\_slsqp*' del paquete de optimización de *SciPy*, la cuál es una librería de herramientas científicas para *Python*, como herramienta para la búsqueda de mínimos. Cabe destacar que esta herramienta se utilizó para ayudar a la búsqueda pero fue necesaria la utilización de cierto criterio por parte del usuario para encontrar los mejores mínimos del problema debido a la multi-dimensionalidad y la no linealidad del mismo.

La cantidad de nodos utilizados en una optimización depende de la relación de costo beneficio entre tiempo de simulación y ganancia en resultado. A mayor cantidad de nodos, el algoritmo de optimización necesita ejecutar más cantidad de veces la simulación de transferencia para poder optimizar. A su vez, mayor cantidad de nodos implica que se puedan utilizar estrategias más complejas que puedan minimizar más la función de costo. Para este trabajo se eligió trabajar con 3 nodos ya que se encontró que con un número mayor de nodos no se encuentran ganancias significativas en la optimización que justifiquen el tiempo de cómputo.

Debe tenerse en cuenta que, debido a que el propagador sólo actualiza sus variables una vez por vuelta, puede darse que la misión cumpla sus requerimientos finales en algún punto entre actualizaciones de parámetros. Esto implica, que debe tenerse en cuenta una banda de aceptación para requerimientos finales de manera que se considere este comportamiento del propagador. Esta banda de aceptación dependerá de cada problema y se calcula de la siguiente manera: se supone que el satélite llega a los requerimientos finales con un peso estimado y se lo propulsa de manera tangencial por una órbita entera de manera constante. Esto dará como resultado el desplazamiento máximo en el semieje mayor que conformará la banda de aceptación. Dicha banda sólo se considera en exceso ya que los requerimientos mínimos son obligatorios. Esto significa que se considerará como valores finales a los valores obtenidos entre el comienzo y el final de la última órbita de la transferencia. Esta banda se verá reflejada en la expresión de los valores finales como un margen de incertidumbre de la siguiente manera:  $xxx \pm yyy$ . En esta expresión,  $xxx$  representa el valor medio de alguna variable entre el inicio y final de la última órbita y  $yyy$  representa la banda de incertidumbre. Cabe destacar que el valor de incertidumbre engloba los valores de comienzo y final de la variable en la última órbita.

Si fuera necesario, el software desarrollado puede brindar la información suficiente para conocer el paso exacto de integración en el cuál los requisitos fueron cumplidos. Sin embargo, esto implica un mayor tiempo de cómputo para la realización de la optimización el cual no se encuentra justificado. Los resultados obtenidos son suficientes para poder realizar un análisis de las órbitas de transferencia óptimas para cada caso sin necesidad de sacrificar tiempo de cómputo. El cálculo de este momento exacto reduciría la incerteza del momento en que se cumplen los requisitos, pero no así los errores numéricos y provenientes de la utilización de un modelo simplificado.

## 4.4. Caso 1: De LEO a GEO en Tiempo Mínimo

### 4.4.1. Misión

La primera misión que se optimizará pretende transferir un satélite de  $1200Kg$  de una órbita LEO inclinada de  $200Km$  de altura a una órbita GEO ecuatorial. Para ello se define la función de costo directamente proporcional al tiempo total de transferencia  $t_f$  ya que minimizar el mismo es del interés de la misión. La razón por la que se eligió esta misión es que se posee material bibliográfico suficiente para contrastar el resultado con un modelo similar de optimización.

La función de costo para este caso se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{J}_1 = t_f \quad (4.4.1)$$

**Tabla 4.2:** Tabla de Misión de caso 1.

Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	6927	42164	Km
Excentricidad	$e$	0	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	0	—	°
Masa	$m$	1200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	10		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	65		%
Impulso específico	$Isp$	3300		$s$
Fecha de Inicio: 01/01/2000 00:00:00				

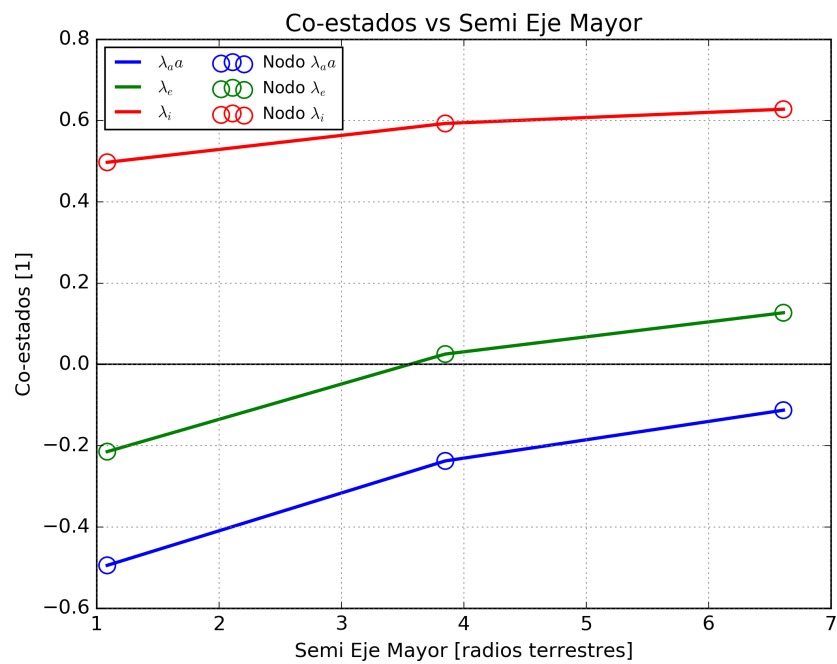
Utilizando la fórmula 1.3.81 se puede obtener el empuje total de los propulsores utilizados en el satélite. Para este satélite el empuje total es de 401,7 mN.

### 4.4.2. Optimización y Resultados

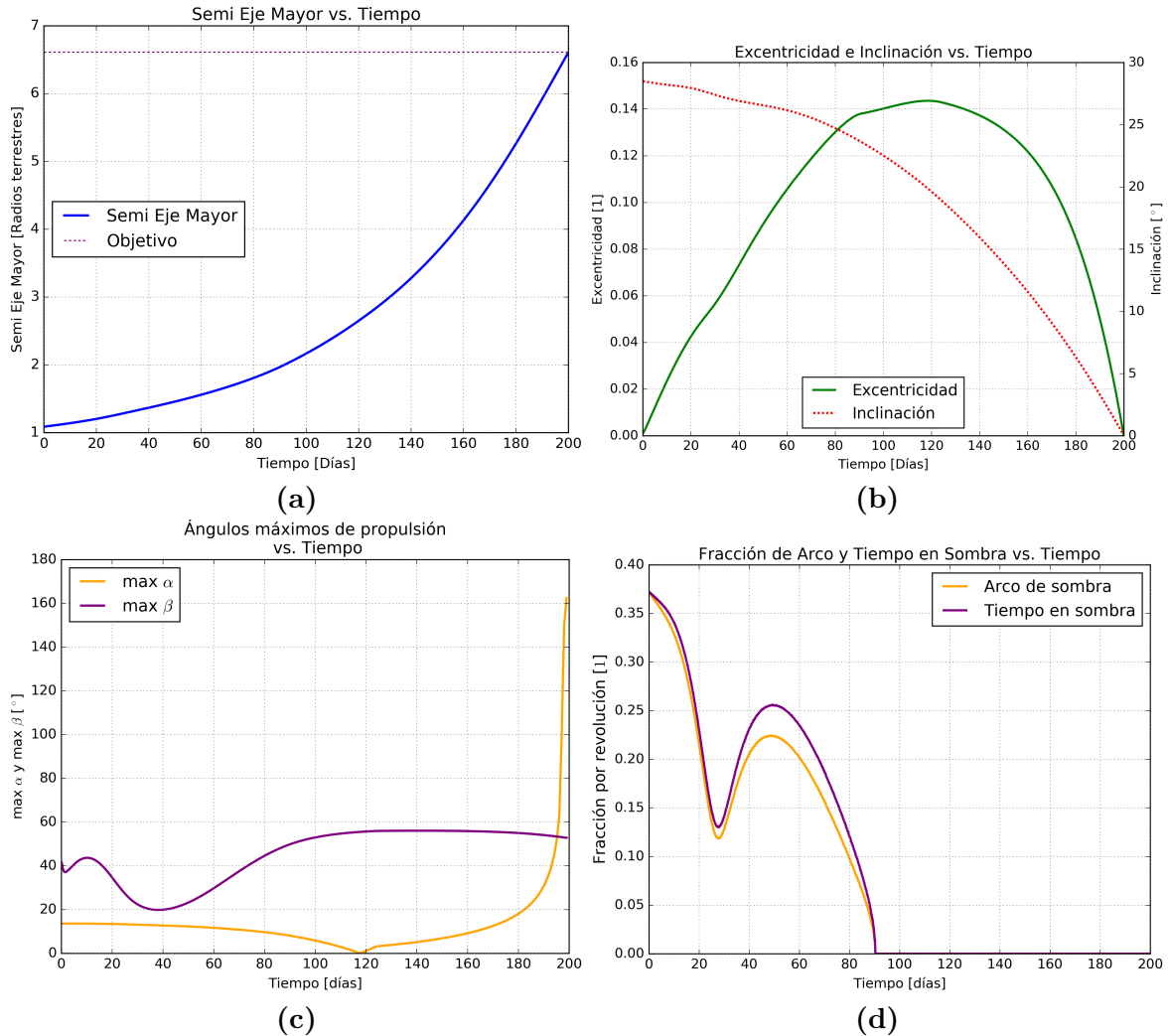
En la tabla 4.3 se muestran los resultados finales de optimización y en la figura 4.4 se muestran los nodos resultantes.

**Tabla 4.3:** resultados relevantes de la optimización del caso 1.

Magnitud	Valor	Unidad
Tiempo de transferencia	$199,47 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado	$193,05 \pm 0,53$	Kg
Nodos		
Nodo n°	$\lambda_a$	$\lambda_e$
1	-0.4944	-0.2146
2	-0.2375	0.0254
3	-0.1127	0.1271

**Figura 4.4:** nodos resultantes de la optimización del caso 1. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semieje mayor.

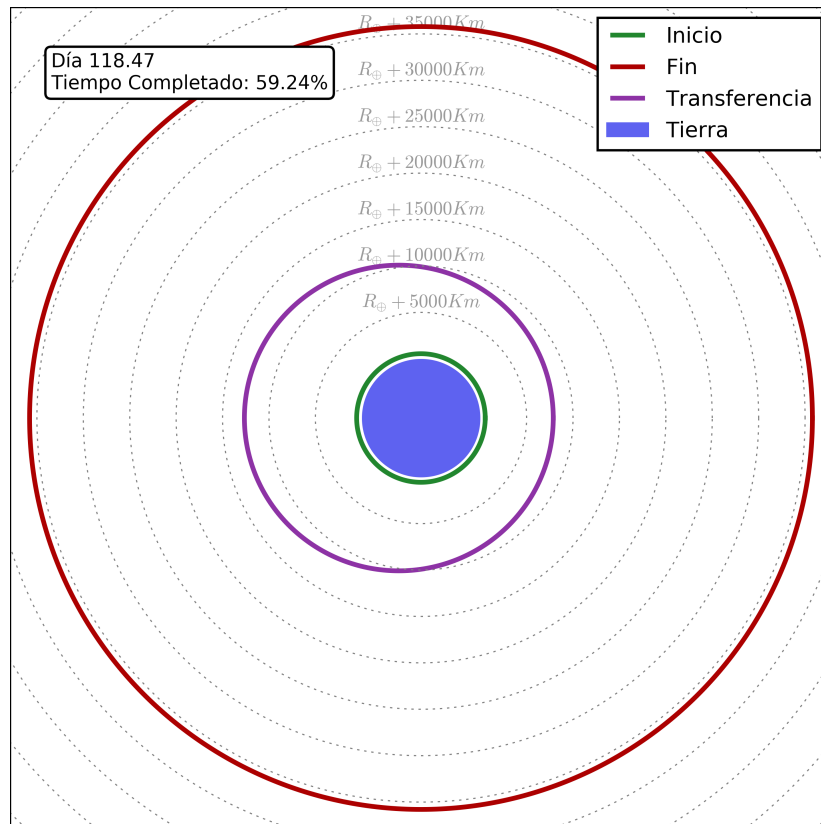
### 4.4.3. Análisis de Resultados



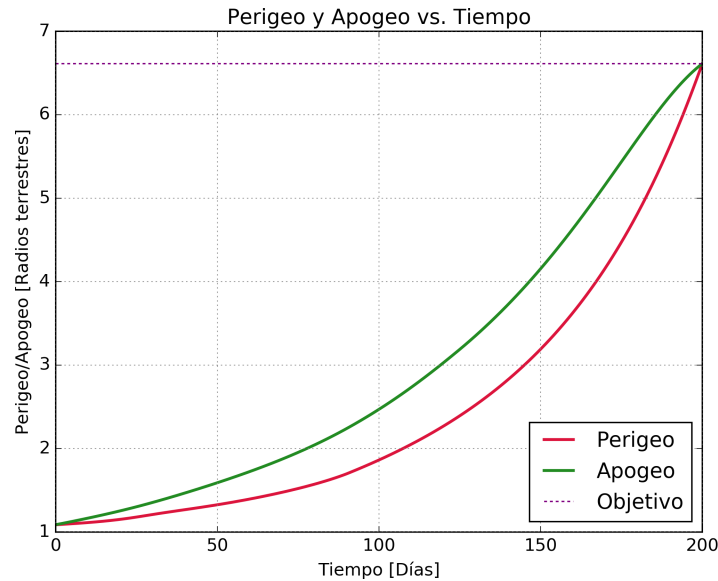
**Figura 4.5:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 1. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).

Para analizar los resultados obtenidos de optimización se implementa la estrategia de transferencia que se obtiene de la misma. Es decir se resuelven las ecuaciones 4.1.8 y 4.1.11 para cada órbita y se integran las aceleraciones resultantes. En las figura 4.5 se pueden observar distintas curvas reelevantes para el análisis de la estrategia. De estas se puede deducir, por ejemplo, que durante la transferencia no se mantiene la circularidad de la órbita, sino que la misma se vuelve ligeramente elíptica (la excentricidad no supera 0,15). La órbita mantiene cierta excentricidad hasta los últimos 60 días de la misión donde se circulariza al mismo tiempo que alcanza el resto de los objetivos. En la figura 4.6 se puede observar en dos dimensiones el plano de la órbita osculante en el momento de mayor excentricidad de la transferencia. Este aumento de excentricidad además, se evidencia en la diferencia entre la fracción de tiempo y la fracción de arco en

sombra. Estas fracciones son idénticas para el caso circular (una cantidad de curva es linealmente proporcional al tiempo) y comienzan a diferenciarse a medida que aumenta la excentricidad. Esto se debe a que la velocidad es variante en una órbita elíptica siendo mayor cerca del perigeo y menor cerca del apogeo.



**Figura 4.6:** representación del plano orbital con las órbitas inicial, final y la del día 118,46: momento de mayor excentricidad en la ejecución de la transferencia. En este instante de tiempo  $a = 16637Km$ ,  $e = 0,1436$ ,  $i = 19,87^\circ$ ,  $\Omega = 67,78^\circ$  y  $\omega = -15,80^\circ$

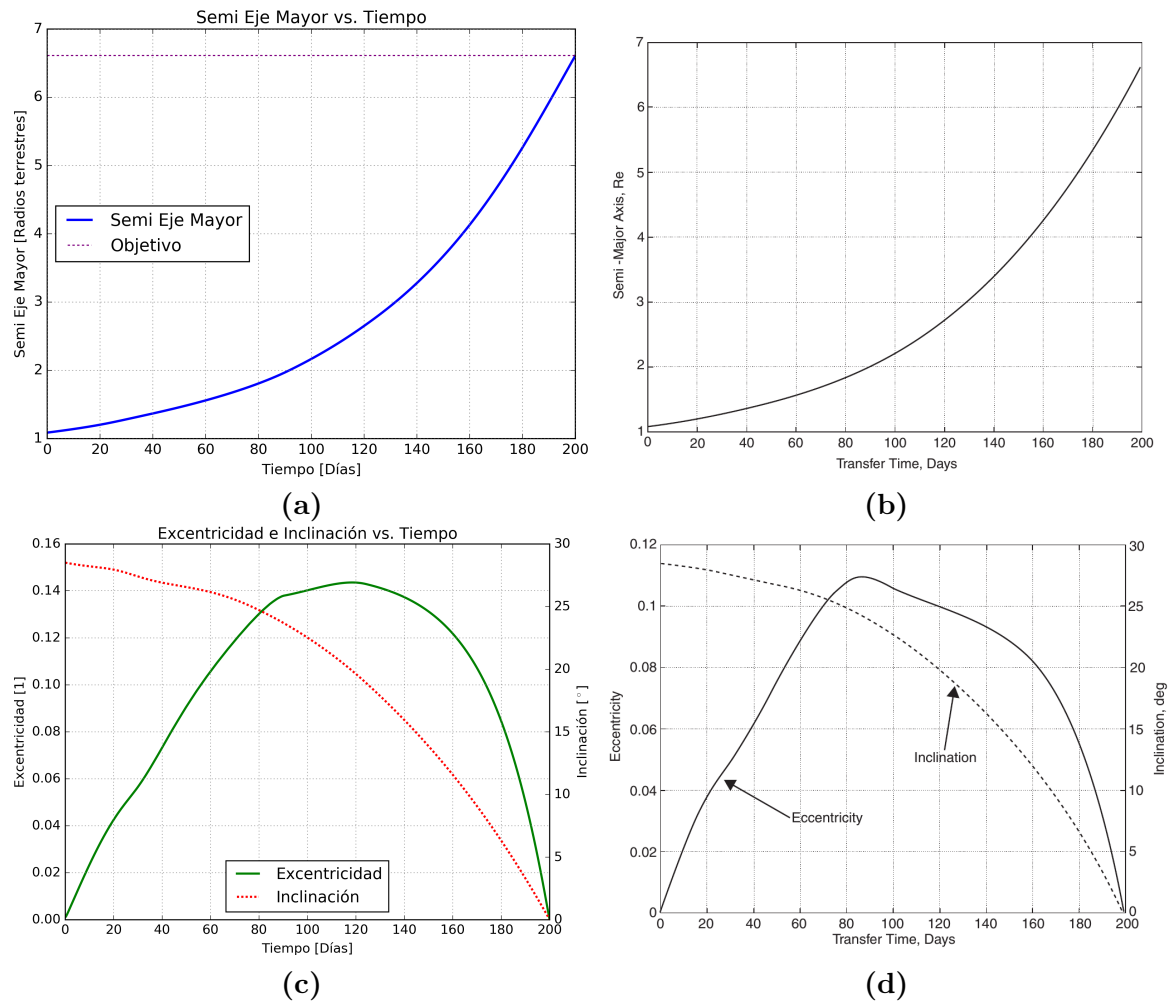


**Figura 4.7:** apogeo y perigeo en función del tiempo. Puede observarse que el perigeo y apogeo comienzan con el mismo valor (órbita circular) y terminan la misión con el mismo valor. La excentricidad lograda a lo largo de la transferencia se ve reflejada en la diferencia de valores de apogeo y perigeo.

#### 4.4.4. Comparación con Resultados Bibliográficos

La principal razón por la que se eligió a este caso como el primero a analizar es que había suficiente material bibliográfico como para poder realizar una comparación. Si bien no se encontraban datos numéricos de la evolución de la estrategia a la cual la fuente llegó como resultado de la optimización, se pudieron utilizar las curvas de evolución de la misma. Hay que considerar que si bien, parte del código del propagador desarrollado se inspiró en el mismo capítulo contra el cual se comparan los resultados, hay algunas diferencias en los modelos y metodologías utilizadas.

La diferencia entre los modelos utilizados en la fuente comparativa y en este trabajo se encuentra en el modelo de sombras. La fuente utiliza un modelo de sombras cilíndrico. Este modelo, supone que el sol se encuentra en un punto en el infinito en la misma dirección que el sol real, y por ende, la sombra proyectada por la tierra posee forma cilíndrica. El modelo elegido en este trabajo, en cambio, calcula simplemente si el satélite posee visión del sol o no. Esto es equivalente a adoptar un modelo real de sombra cónica. El resultado de estas diferencias es, que en ocasiones nuestro propagador considerará que el satélite se encuentra en zonas ensombrecidas de la órbita, cuando el modelo de la fuente considerará que se encuentra iluminado. Esto implica que, en ciertas órbitas, el tiempo de encendido de los propulsores en el modelo que utilizamos será menor al de la fuente. Como resultado, pueden esperarse tiempos mínimos en la optimización ligeramente mayores al de la fuente.



**Figura 4.8:** comparación de las evoluciones del semi eje mayor, excentricidad e inclinación (Cusoi a y c) respecto del mismo caso analizado en Conway (b y d).

Asimismo las metodologías de propagación utilizadas en cada caso son diferentes. En nuestro caso, el propagador actualiza los elementos orbitales una vez por órbita, utilizando la última órbita para calcular el cambio en los elementos. En el caso de la fuente, se calcula el cambio medio de los elementos en una órbita y se propaga una dada cantidad de días los elementos, para volver a calcular el cambio medio con los nuevos valores.

**Tabla 4.4:** comparación con datos bibliográficos del caso 1 vs Conway.

Magnitud	Bibliografía	Cusoi	Diferencia	Unidad
Tiempo de transferencia	198,99	199,46 $\pm$ 0,50	-0,011 % $\sim$ 0,491 %	días
Propelente utilizado	193,01	193,05 $\pm$ 0,53	-0,250 % $\sim$ 0,296 %	Kg

Observando la tabla comparativa 4.4 se puede concluir que las diferencias entre los resultados de la fuente y del presente trabajo son despreciables. Observando las curvas de evolución se puede ver que las mayores diferencias suceden en la excentricidad, las cuales también se consideran despreciables.

## 4.5. Caso 2: De LEO a GEO en Propelente Mínimo

### 4.5.1. Misión

La segunda de las misiones a optimizar es idéntica a la misión 1, con la diferencia que se elige otra función de costo a optimizar. La función de costo para esta misión será la masa utilizada como propelente. Ésta, se expresa como:

$$\mathcal{J}_2 = m_{inicial} - m_{final} = m_{prop} \quad (4.5.1)$$

**Tabla 4.5:** Tabla de Misión de caso 2. Idéntica a la tabla de misión del caso 1.

Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	6,927	42,164	Km
Excentricidad	$e$	0	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	0	—	°
Masa	$m$	1,200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	10		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	65		%
Impulso específico	$Isp$	3,300		$s$
Fecha de Inicio: 01/01/2000 00:00:00				

Como en el caso 1, el empuje de los propulsores del satélite es de 401,7 mN.

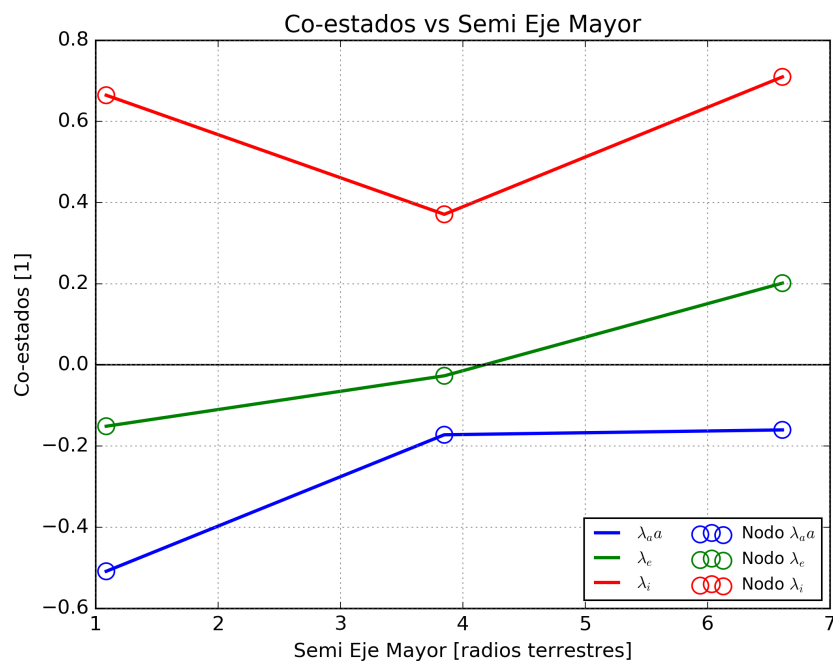
### 4.5.2. Optimización y Resultados

En la tabla 4.6 se muestran los resultados finales de la optimización y en la figura 4.9 se muestran los nodos resultantes.



**Tabla 4.6:** resultados relevantes de la optimización del caso 2.

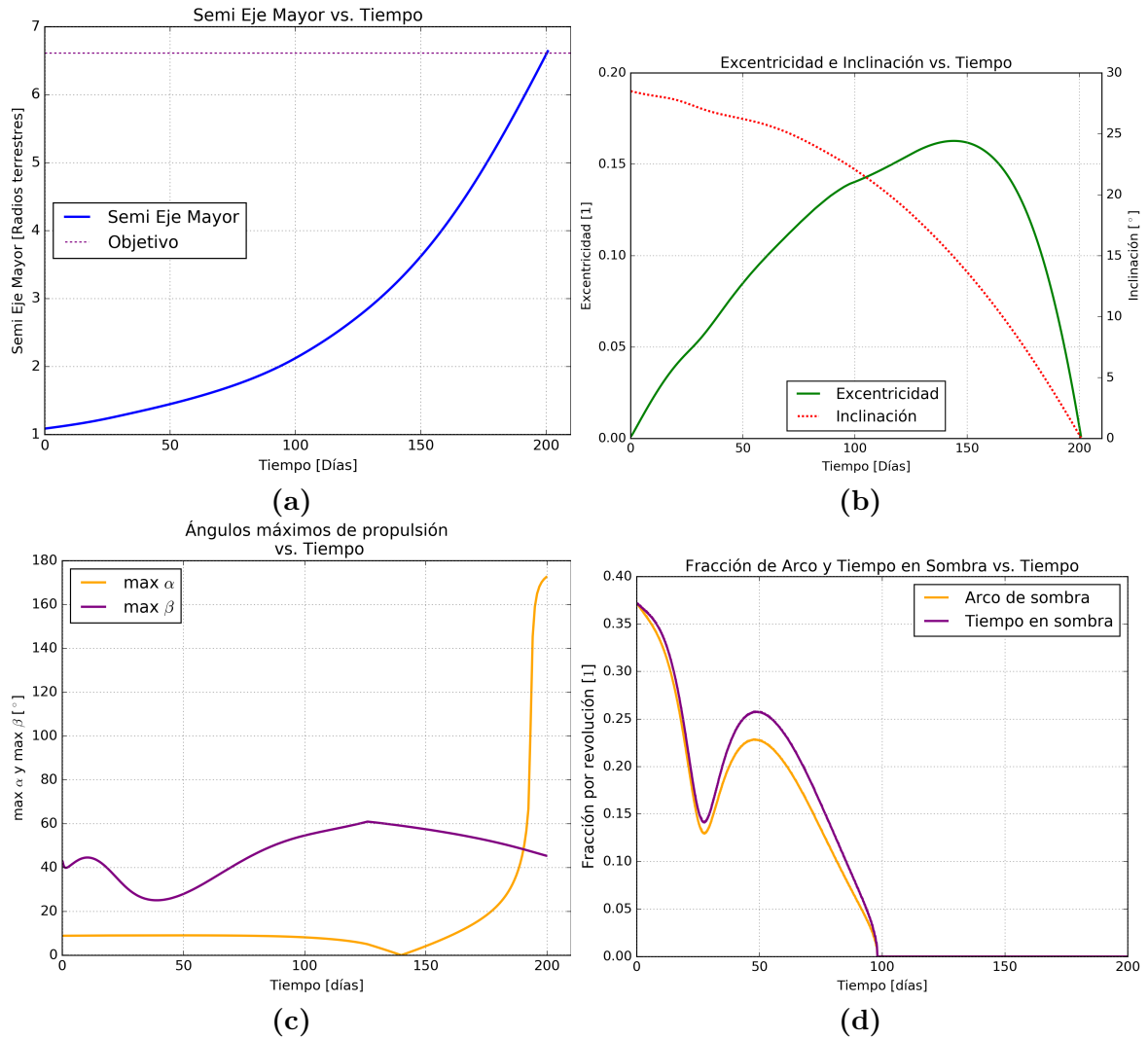
Magnitud		Valor	Unidad
Tiempo de transferencia		$200,16 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado		$192,80 \pm 0,53$	Kg
Nodos			
Nodo $n^\circ$	$\lambda_a$	$\lambda_e$	$\lambda_i$
1	-0.5087	-0.1513	0.6645
2	-0.1723	-0.0269	0.3710
3	-0.1603	0.2014	0.7096

**Figura 4.9:** nodos resultantes de la optimización del caso 2. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semieje mayor.

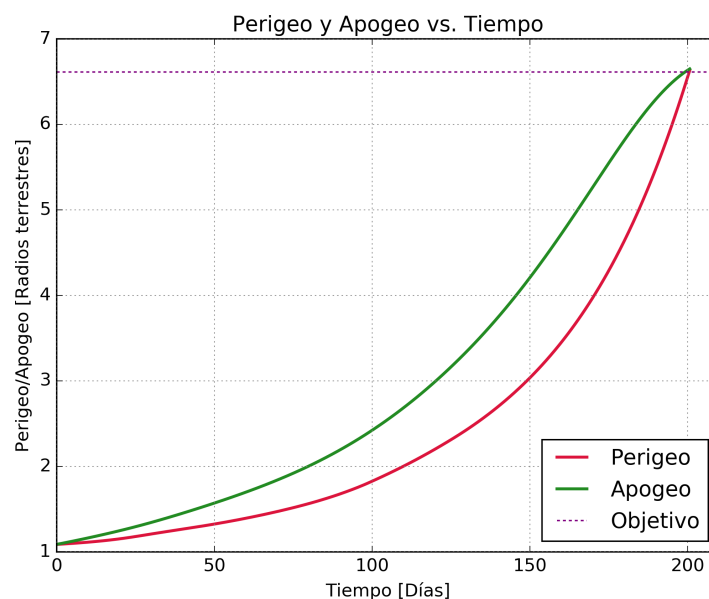
### 4.5.3. Análisis de Resultados

En la figura 4.10 pueden observarse las curvas de evolución para el caso resuelto. Comparando éstas con las del caso 1 no pueden observarse diferencias substanciales a simple vista. Es por ello, que se presentan las diferencias en las evoluciones de los parámetros orbitales relevantes en la figura 4.12. En esta figura, puede observarse que el caso 1 comienza a corregir de manera más temprana los parámetros de misión, en cambio, el caso 2 espera hacia los últimos días de misión para terminar de corregir las variables de manera más abrupta. Esto, podría deberse a que es más eficiente realizar los cambios en semi eje mayor, excentricidad e inclinación cuanto más alejado de la tierra se esté y cuanto más lento se encuentre circulando el satélite, lo cual sucede hacia el final de la misión. Esto puede deducirse de las ecuaciones de Gauss para las

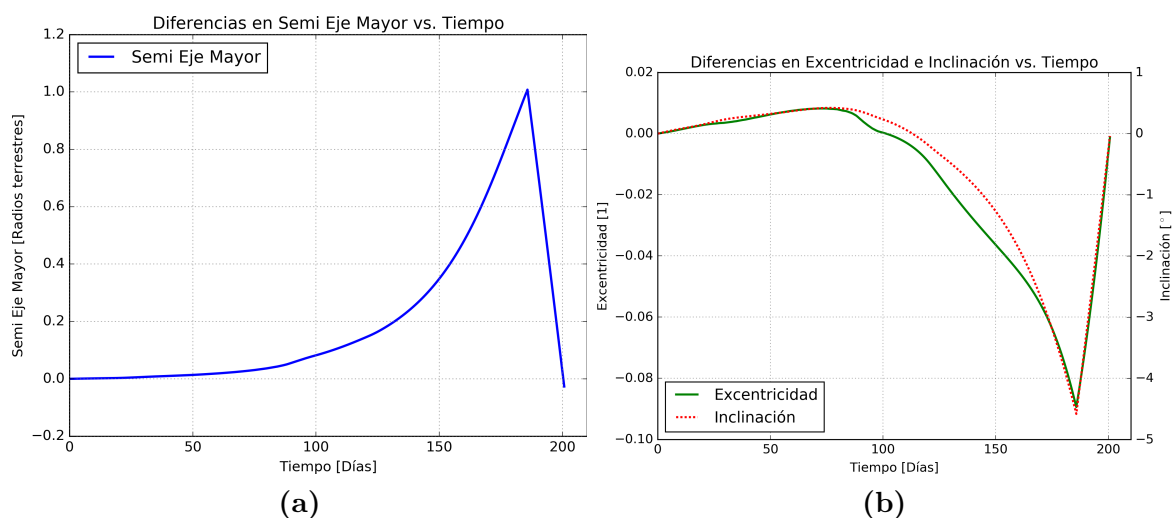
coordenadas  $\mathcal{NTH}$  (ecuación 1.3.78). De esta manera la transferencia es relativamente más lenta que el caso 1 pero también consume menor masa. Sin embargo, ha de notarse que las diferencias en tiempos y consumos entre ambos casos son muy pequeñas ( $< 1\%$ ) y que, probablemente, no se justifique la elección de una transferencia respecto de la otra.



**Figura 4.10:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 2, similar al caso 1 con minimización de masa utilizada. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).



**Figura 4.11:** apogeo y perigeo en función del tiempo. Estas curvas de evolución son muy similares a las del caso 1. Esto muestra la similitud existente entre las dos estrategias. La diferencia en tiempos finales se puede evidenciar en la necesidad de una escala diferente para las curvas de este caso.



**Figura 4.12:** diferencias en las curvas de evolución entre los casos 1 y 2. Para encontrar estas curvas se restó a las curvas del caso 1 los valores de curva del caso 2. Debido a que en el caso 1 la misión se cumple más temprano, es necesario completar datos en el caso 1 para compararlo con el caso 2. Para ello se eligió extender los finales de la misión hasta completar el tiempo del caso 2.

#### 4.5.4. Comparación con Resultados Bibliográficos

Al igual que en el caso 1, existen resultados bibliográficos disponibles de una optimización similar para realizar la comparación de resultados. En la tabla 4.7 pueden observarse las diferencias en los resultados entre el caso resuelto en este trabajo y en el resuelto por Conway. Se puede ver que los resultados en tiempo son muy similares y

que los resultados en masa, si bien se encuentran dentro de la cota de error, esta se encuentra desplazada hacia valores más altos. Esto podría ser producto de las diferencias en modelo y metodología explicadas en el caso 1.

**Tabla 4.7:** comparación con datos bibliográficos del caso 2 vs Conway.

Magnitud	Bibliografía	Cusoi	Diferencia	Unidad
Tiempo de transferencia	200,16	$200,16 \pm 0,50$	$-0,250 \% \sim 0,251 \%$	día
Propelente utilizado	192,40	$192,54 \pm 0,53$	$-0,066 \% \sim 0,485 \%$	Kg

## 4.6. Caso 3: De GTO a GEO

### 4.6.1. Misión

La tercera de las misiones a optimizar se trata de una transferencia desde una órbita GTO a una órbita GEO. A partir de esta misión, las subsiguientes tendrán los mismos requerimientos finales y características del satélite. Se eligió conservar los requerimientos de misión y las características de satélite para poder comparar los resultados. De esta manera, no sólo se realizarán las optimizaciones sino que podrá hacerse un análisis sobre las ventajas y desventajas de los distintos tipos de transferencias. En esta misión se desea optimizar el tiempo de misión. Esto se ve reflejado en la ecuación de costo de la misión (ecuación 4.6.1).

$$\mathcal{J}_3 = t_f \quad (4.6.1)$$

**Tabla 4.8:** Tabla de Misión de caso 3.

Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	24364	42164	Km
Excentricidad	$e$	0,7306	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	0	—	°
Masa	$m$	1200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	5		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	55		%
Impulso específico	$Isp$	1800		$s$
Fecha de Inicio: 22/03/2000 00:00:00				

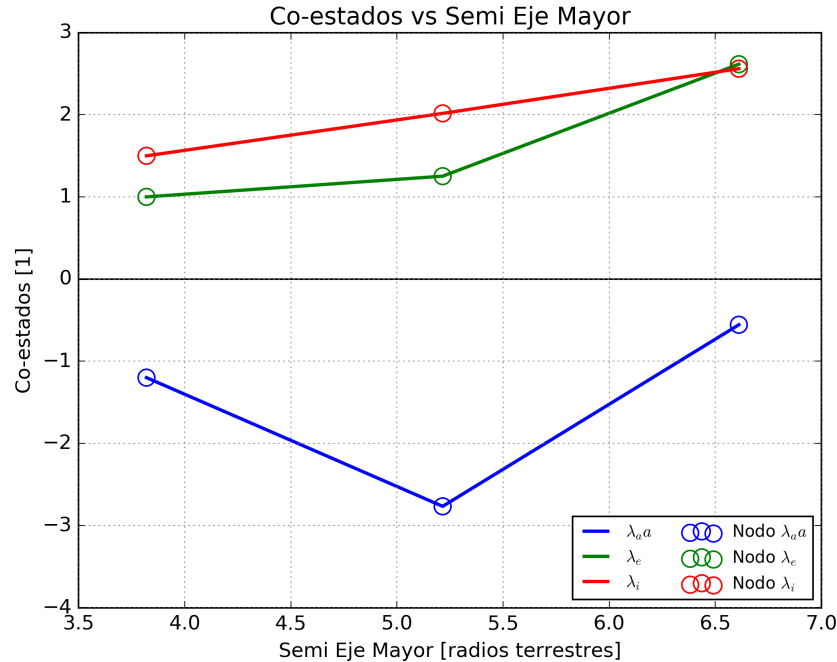
De la misma manera que en los casos anteriores, se calcula la fuerza de los propulsores del satélite. Dicho cálculo, indica que los propulsores proporcionan un empuje de 311,58 mN.

### 4.6.2. Optimización y Resultados

En la tabla 4.9 se muestran los resultados finales de la optimización y en la figura 4.13 se muestran los nodos resultantes.

**Tabla 4.9:** resultados relevantes de la optimización del caso 3.

Magnitud		Valor	Unidad
Tiempo de transferencia		$119,21 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado		$170,10 \pm 0,76$	Kg
Nodos			
Nodo n°	$\lambda_a$	$\lambda_e$	$\lambda_i$
1	-1.2000	1.0000	1.5000
2	-2.7664	1.2519	2.0163
3	-0.5563	2.6148	2.5600

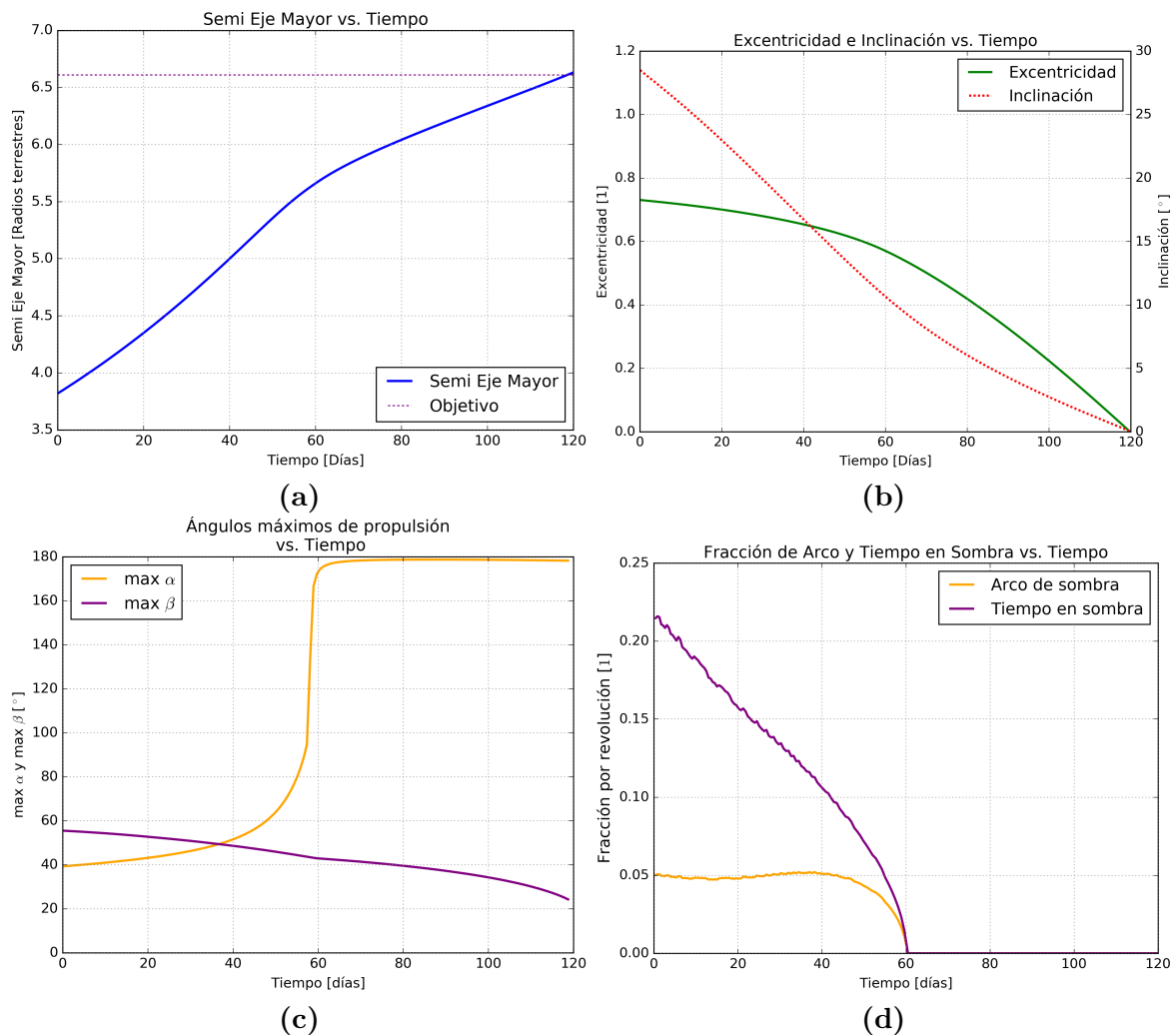


**Figura 4.13:** nodos resultantes de la optimización del caso. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semi-eje mayor.

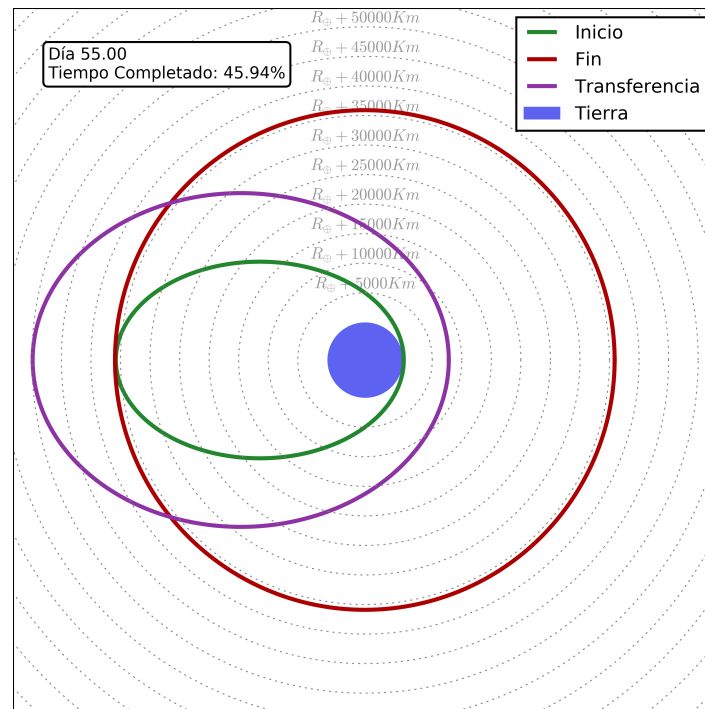
### 4.6.3. Análisis de Resultados

Observando las curvas de evolución de la figura 4.14 se puede ver que es significativa la diferencia de fracción de tiempo en sombra terrestre respecto de la fracción

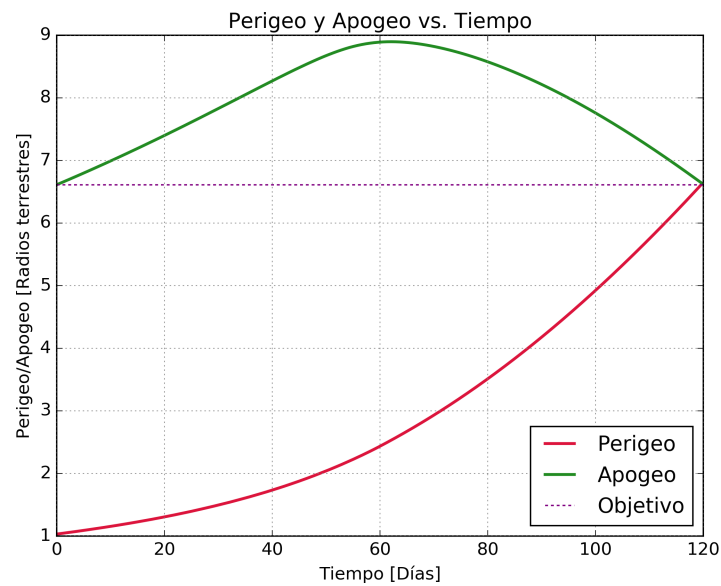
de arco de sombra al comienzo de la transferencia. Esto se debe a que la sombra proyectada por la tierra se sitúa en la zona más alejada de la órbita, que es donde el satélite circula más lentamente. Esto significa, que el satélite pasará más tiempo sin poder propulsarse; sólo puede propulsarse alrededor del 80 % del período orbital en las primeras órbitas. Además, puede observarse que aproximadamente hasta el día 60 la tasa de crecimiento del semi eje mayor es más grande que después de este día. De manera contraria la excentricidad comienza a reducirse, o sea la órbita comienza a circularizarse, más rápidamente a partir de este día. Esto, nuevamente, puede deberse a que los cambios de excentricidad son más eficientes, o sea se realizan más rápidamente, cuanto más altura y menor velocidad tenga el satélite. Esto se ve reflejado en el ángulo máximo de propulsión  $\alpha$  a partir del día 60 el cuál se aproxima a los  $180^\circ$ , lo cuál indica que comienza a ser más prioritario reducir la excentricidad que aumentar el semi eje mayor para llegar a cumplir con los requerimientos.



**Figura 4.14:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 3. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).



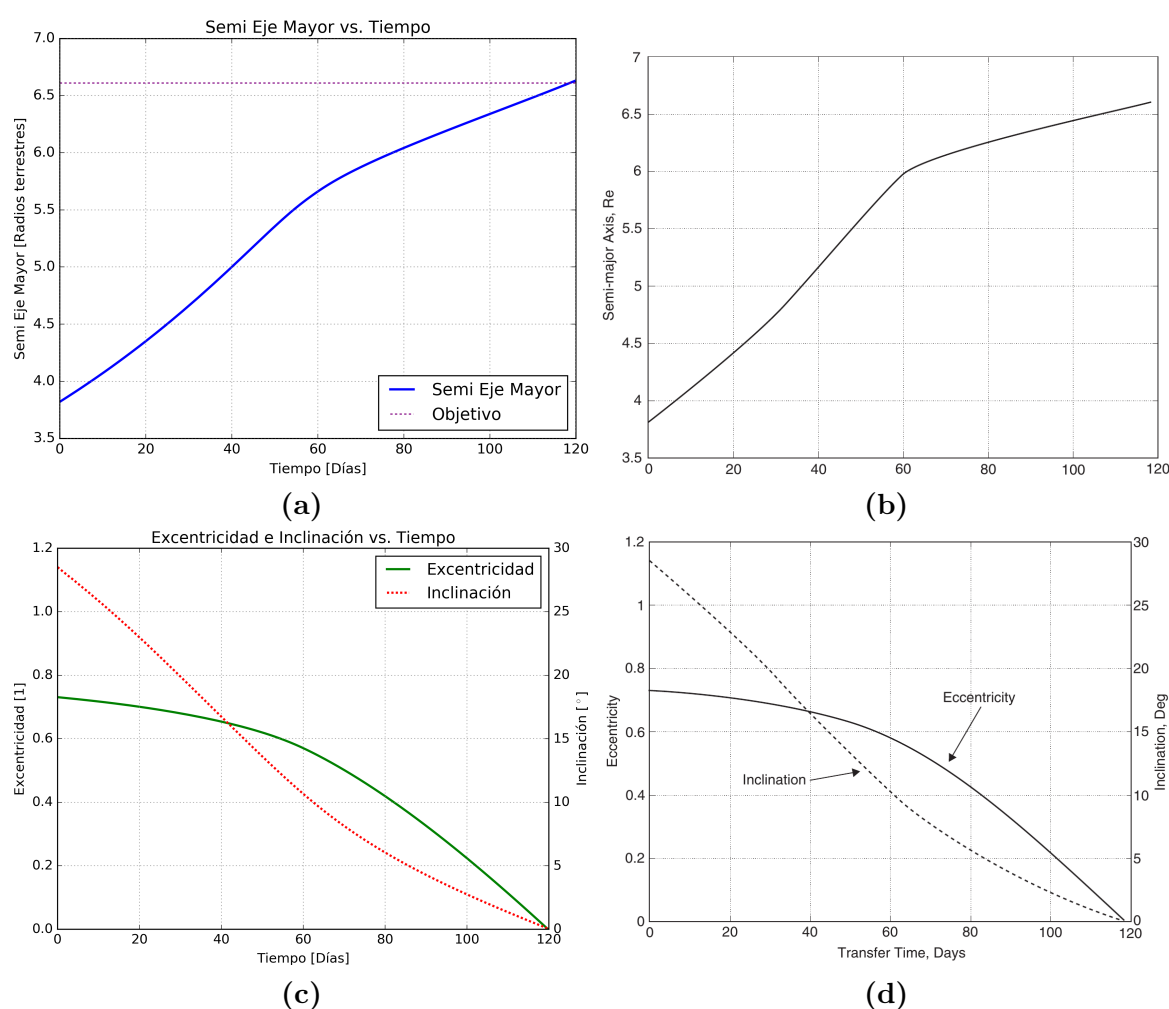
**Figura 4.15:** representación del plano orbital con las órbitas inicial, final y la del día 55. Se puede observar que el perigeo sobrepasa bastante ( $\sim 15000$  Km) el radio final de órbita. En este instante de tiempo  $a = 35211\text{Km}$ ,  $e = 0,59731$ ,  $i = 12,09^\circ$ ,  $\Omega = -15,90^\circ$  y  $\omega = -24,62^\circ$



**Figura 4.16:** apogeo y perigeo en función del tiempo. En esta figura puede observarse lo dicho en el análisis: con el objetivo de subir rápidamente el semi eje mayor, la estrategia encontrada eleva el perigeo alrededor de 15000 Km por encima del objetivo para luego reducirlo. Notar que comienza a reducirse a partir del día 60, aproximadamente a la mitad del tiempo total de transferencia.

#### 4.6.4. Comparación con Resultados Bibliográficos

Comparando los resultados obtenidos nuevamente con Conway se puede observar en la figura 4.17 que las curvas de evolución para ambos casos presentan comportamientos muy similares. Esto junto a la tabla 4.10 permite concluir que la optimización que se realizó es muy similar a la de la fuente de comparación. Las únicas diferencias notables están el tiempo total de la misión, el cual para nuestro caso es ligeramente mayor. Esto, puede deberse a las mismas razones del caso 1: la diferencia en modelos de sombra terrestre.



**Figura 4.17:** comparación de las evoluciones del semi eje mayor, excentricidad e inclinación (Cusoi a y c) junto a las del mismo caso en Conway (b y d).

**Tabla 4.10:** comparación con datos bibliográficos del caso 3 vs Conway.

Magnitud	Bibliografía	Cusoi	Diferencia	Unidad
Tiempo mínimo de transferencia	118,415	119,21 ± 0,50	0,253 % ~ 1,098 %	día



## 4.7. Caso 4: Mejora de Caso 3; Mejores Condiciones Iniciales

### 4.7.1. Misión

En esta misión se utilizan los mismo requerimientos finales que en el caso 3 y el mismo satélite con la diferencia que las condiciones iniciales varían. Como análisis del caso 3 se concluyó que el tiempo que el satélite pasaba en la sombra terrestre era significativamente alto respecto del arco de órbita que transitaba por la sombra. Esto significaba que el satélite se encuentra en la sombra terrestre alrededor del apogeo. Para invertir esta situación se rota la órbita  $180^\circ$  con el cambio del argumento de perigeo. Esto debería resultar en la inversión de las fracciones de tiempo y arco de órbita del caso anterior, permitiendo así más tiempo de propulsión para el satélite en el comienzo de la misión. Nuevamente se desea optimizar el tiempo total de transferencia. La función de costo se expresa como:

$$\mathcal{J}_\Delta = t_f \quad (4.7.1)$$

**Tabla 4.11:** Tabla de Misión de caso 4.

Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	24364	42164	Km
Excentricidad	$e$	0,7306	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	180	—	°
Masa	$m$	1200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	5		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	55		%
Impulso específico	$Isp$	1800		$s$
Fecha de Inicio: 22/03/2000 00:00:00				

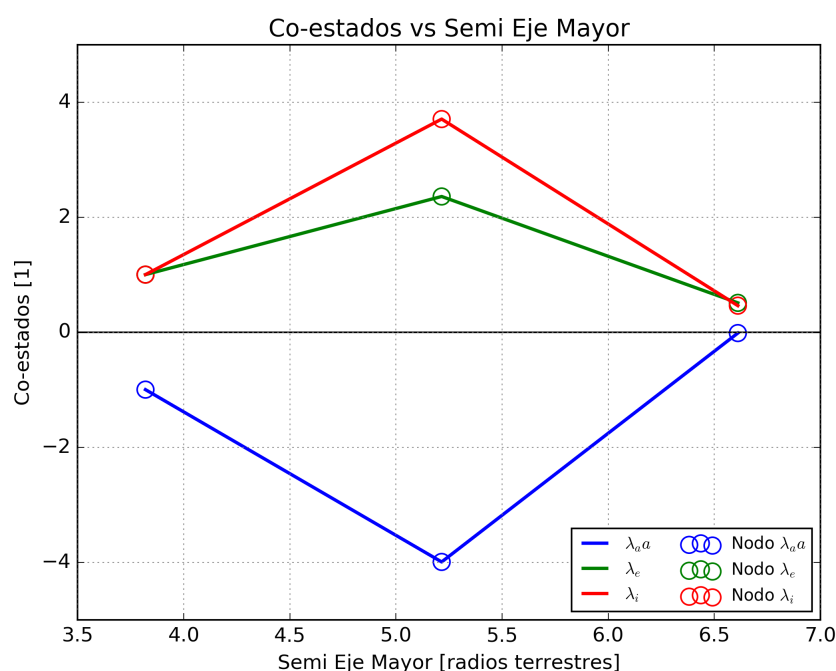
### 4.7.2. Optimización y Resultados

En la tabla 4.12 se muestran los resultados finales de la optimización y en la figura 4.18 se muestran los nodos resultantes. Con la mejora de condiciones iniciales se mejoró

el tiempo de transferencia alrededor de 7 días respecto del caso 3. También se utilizaron alrededor de 2,5 Kg menos de propelente para llevar a cabo la misión. Esto muestra que con un cambio menor, como la rotación del sentido de la órbita respecto del sol, se puede incrementar la eficiencia de la transferencia considerablemente: alrededor del 6 % en tiempo y del 1,5 % en masa.

**Tabla 4.12:** resultados relevantes de la optimización del caso 4.

Magnitud		Valor	Unidad
Tiempo de transferencia		$111,97 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado		$167,53 \pm 0,76$	Kg
Nodos			
Nodo n°	$\lambda_a$	$\lambda_e$	$\lambda_i$
1	-1.0000	1.0000	1.0000
2	-3.9959	2.3584	3.7044
3	-0.0165	0.5089	0.4604

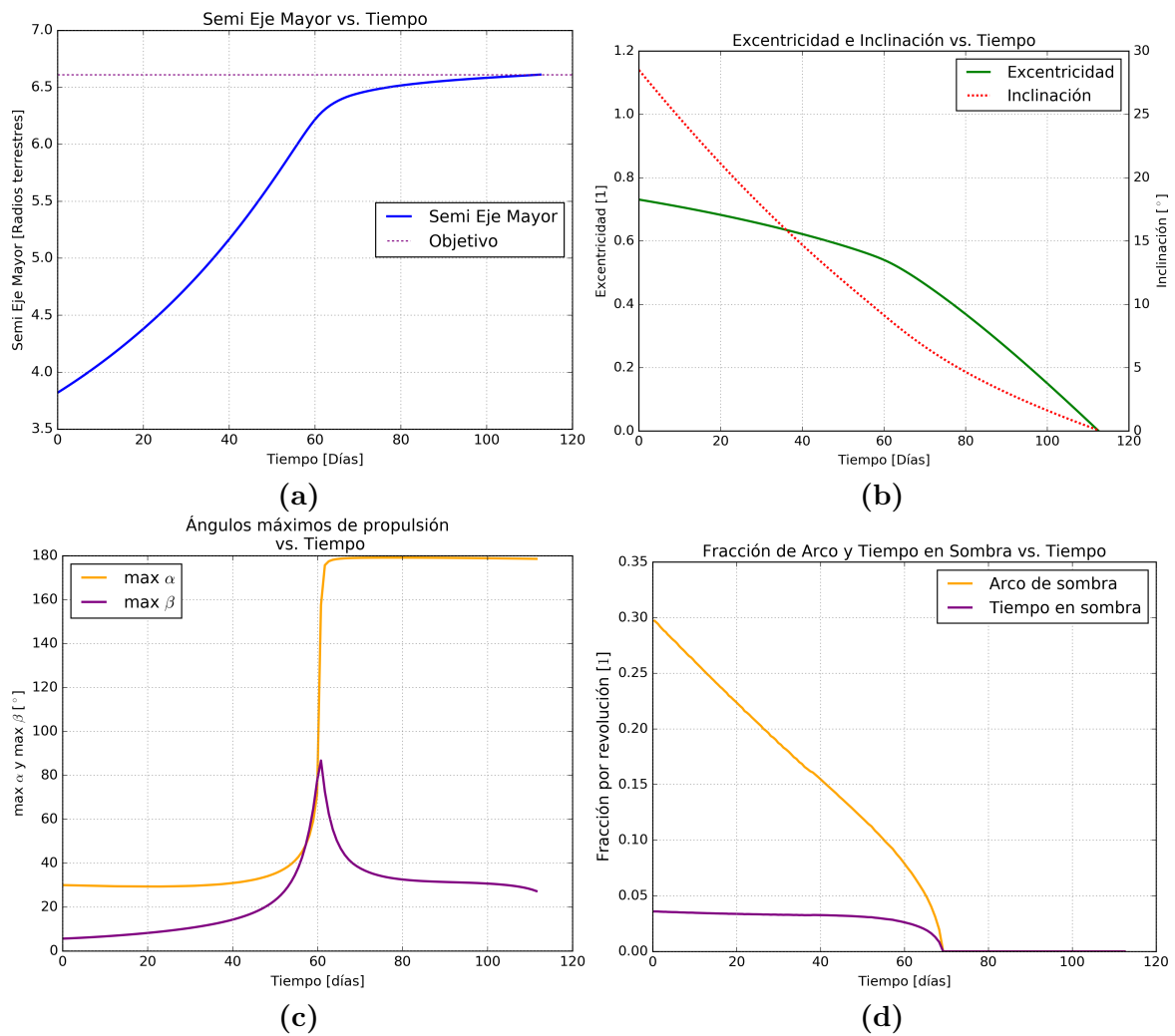


**Figura 4.18:** nodos resultantes de la optimización del caso 4. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semieje mayor.

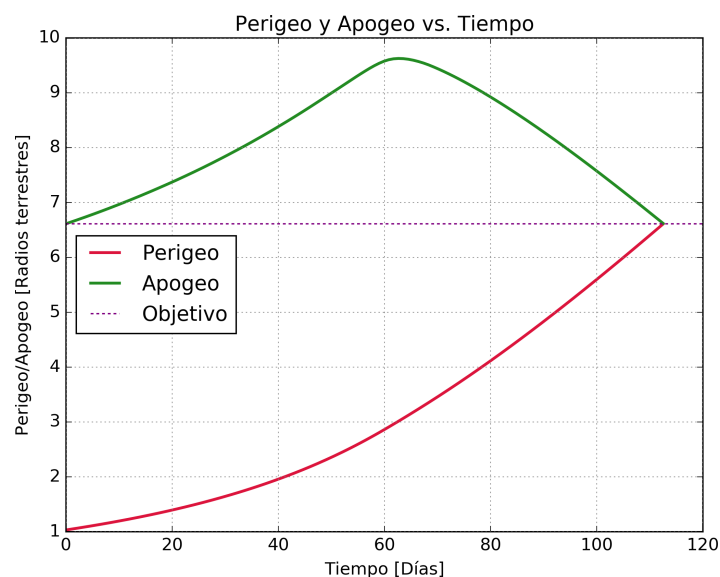
### 4.7.3. Análisis de Resultados

Observando la figura 4.19 y comparandola con los resultados del caso 3 en la figura 4.14, se ve que las fracciones de tiempo y arco de sombra se invirtieron, lo cuál permite más tiempo de propulsión al inicio de la transferencia. Esto, se evidencia en la velocidad de crecimiento del semi eje mayor la cuál es mayor a la del caso 3, como resultado

del mayor tiempo de propulsión debido a la rotación de la órbita. Dicho cambio, permite que la transferencia se realice de manera más rápida y con menor utilización de propelente. Además, en la figura 4.20, el apogeo tiene un máximo mayor al del caso caso 3 en la figura 4.16. Como consecuencia la transferencia se realiza de manera más eficiente y por ende consume menos propelente y tarda menos tiempo.



**Figura 4.19:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 4. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).



**Figura 4.20:** apogeo y perigeo en función del tiempo. Esta evolución es similar a la del caso 3 con un valor máximo de apogeo mayor. Ha de notarse, que para que este valor sea mayor las velocidades de cambio del mismo, tanto en ascendencia como descendencia, son mayores.

#### 4.7.4. Comparación con Resultados Bibliográficos

En cuanto a la comparación con los resultados bibliográficos, estos indican una reducción en el tiempo de misión de más de 6 días. En nuestra optimización esto se verifica ya que la reducción en el tiempo de misión es de alrededor de 7 días.

**Tabla 4.13:** comparación con datos bibliográficos del caso 4 vs Conway.

Magnitud	Bibliografía	Cusoi	Diferencia	Unidad
Tiempo mínimo de transferencia	112,11	111,97 $\pm$ 0,50	-0,566 % $\sim$ 0,324 %	día

### 4.8. Caso 5: De GTO a GEO; Tiempo Mínimo en Cinturón de Van Allen

#### 4.8.1. Misión

La quinta de las misiones a optimizar es idéntica en requisitos y condiciones iniciales al caso 3, la diferencia reside en la función de costo a optimizar. Siendo el cinturón de Van Allen una zona de alta radiación ionizante, donde los equipos de los satélites se ven seriamente dañados, es importante desarrollar estrategias de transferencia que minimicen el tiempo que se permanece en dicha zona. La función de costo para este caso se puede expresar como:

$$\mathcal{J}_5 = \sum_{n=1}^R \int_{\mathcal{N}_n} t_n(\nu) d\nu \quad (4.8.1)$$

donde  $R$  es el número total de revoluciones orbitales de la transferencia,  $\nu$  es la anomalía verdadera,  $t_n(\nu)$  es el tiempo que pasó desde el último perigeo en la posición  $\nu$  para la revolución  $n$  y  $\mathcal{N}_n$  son los valores de anomalía verdadera para los cuales el satélite pasa por dentro del cinturón de Van Allen para la revolución  $n$ . La zona del cinturón de Van Allen en la que se desea pasar el menor tiempo posible para se encuentra entre los 2.000 Km y 10.000 Km de altura de la superficie terrestre.

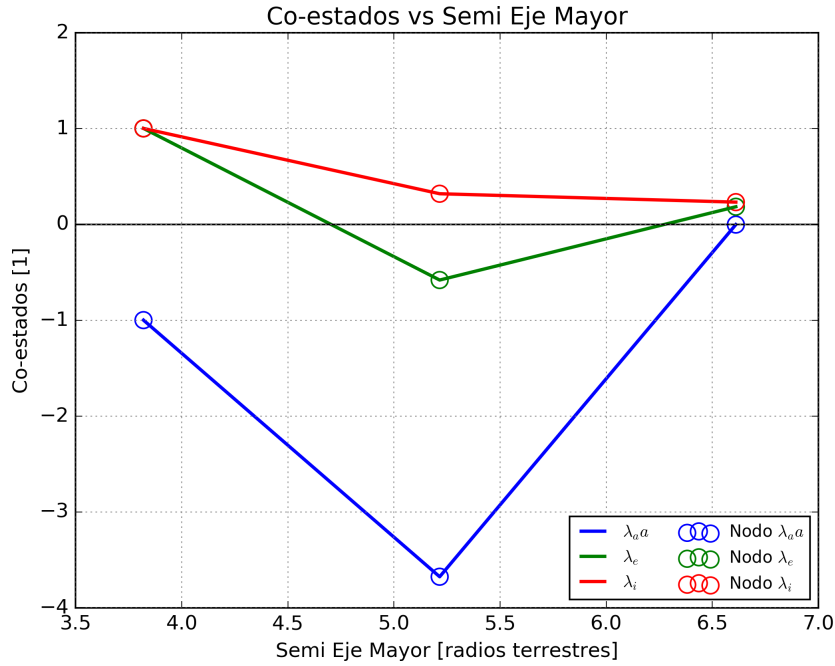
Es decir:  $\mathcal{N}_n = \{\nu \in \mathfrak{R} \mid 2000Km + R_{\oplus} < r_n(\nu) < 10000Km + R_{\oplus}\}$ , donde  $R_{\oplus}$  es el radio terrestre y  $r_n(\nu)$  es la ecuación de órbita Kepleriana (ecuación 1.3.52) para la revolución  $n$ .

### 4.8.2. Optimización y Resultados

En la tabla 4.14 se muestran los resultados finales de la optimización y en la figura 4.21 se muestran los nodos resultantes. A diferencia de los resultados anteriores en esta tabla se agregó el tiempo que pasa el satélite en la zona del cinturón de Van Allen de interés.

**Tabla 4.14:** resultados relevantes de la optimización del caso 5.

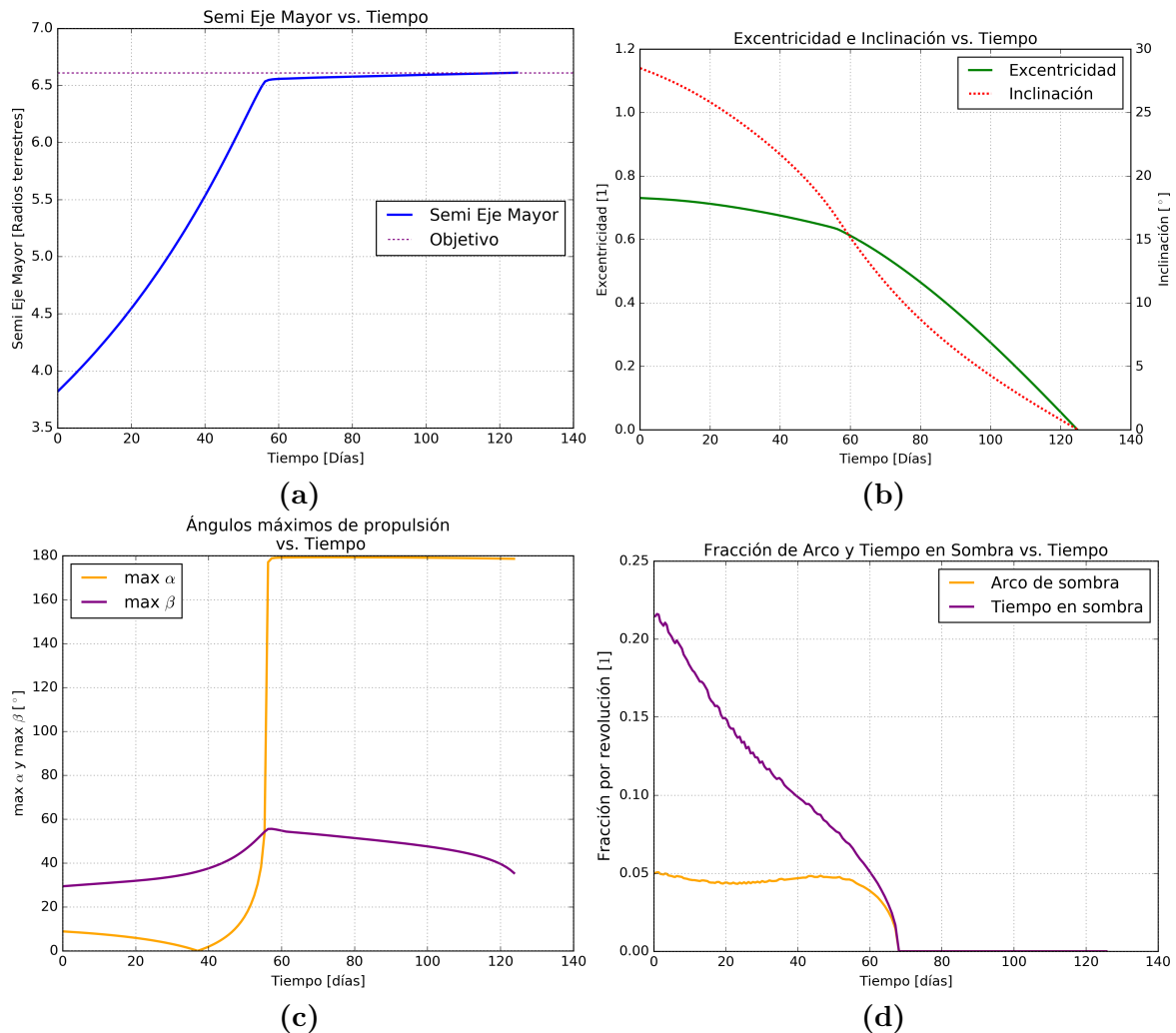
Magnitud		Valor	Unidad
Tiempo de transferencia		$124,18 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado		$117,58 \pm 0,76$	Kg
Tiempo en Cinturón de Van Allen		119,08	Horas
Nodos			
Nodo n°	$\lambda_a$	$\lambda_e$	$\lambda_i$
1	-1.0000	1.0000	1.0000
2	-3.6772	-0.5818	0.31845
3	-0.0032	0.1828	0.2309



**Figura 4.21:** nodos resultantes de la optimización del caso 4. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semieje mayor.

### 4.8.3. Análisis de Resultados

En la curva de evolución del semi eje mayor de la figura 4.22 se pueden notar los efectos del cambio de la función de costo a optimizar respecto al caso base 3. En este caso, el semi eje mayor crece de manera abrupta hasta aproximadamente el día 60. También, se puede observar que la excentricidad no se reduce significativamente hasta este día, sólo disminuye de 0,73 a  $\sim 0,6$ . Este tipo de evolución logra reducir el tiempo que se pasa en el cinturón de Van Allen respecto de los casos donde la función de costo era el tiempo. En la figura 4.23 se puede observar con más detalle que aproximadamente en el día 60 el satélite deja de pasar por el cinturón. A partir de este día el comportamiento de la transferencia cambia y se centra en la reducción de la excentricidad y la inclinación. Esto, puede evidenciarse en las curvas de excentricidad/inclinación y en los ángulos máximos de propulsión como se explicó anteriormente. En la figura 4.24 puede verse una representación de la órbita osculante para el momento en que el perigeo abandona la zona de peligro.

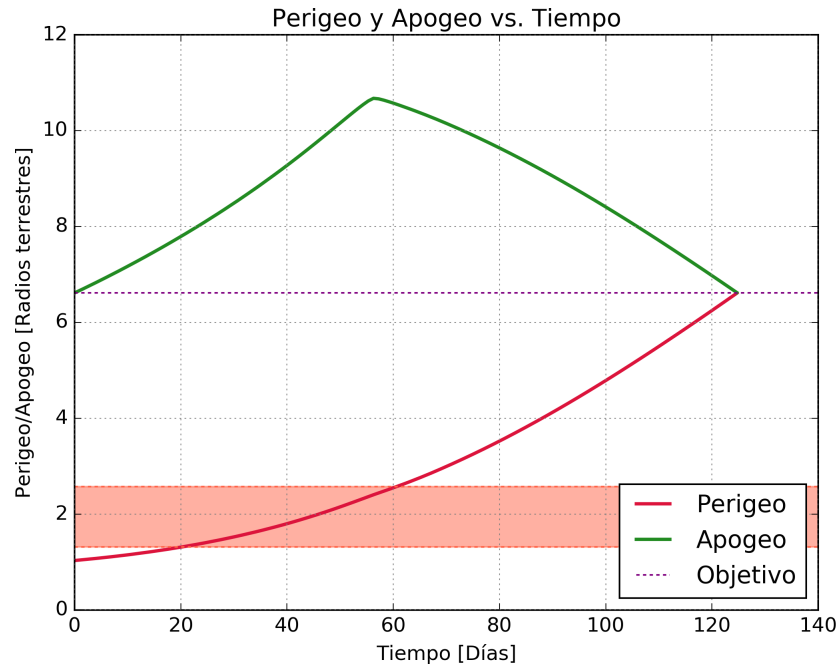


**Figura 4.22:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 5. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).

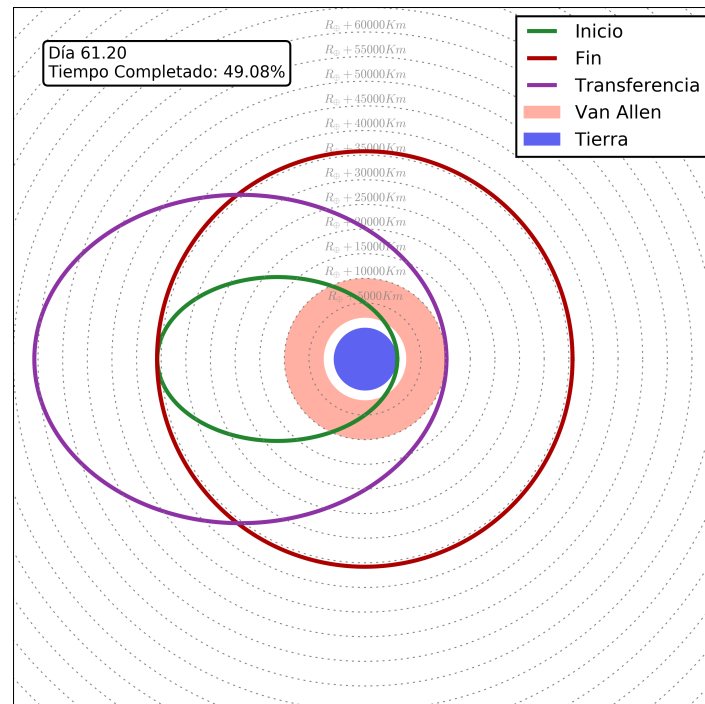
**Tabla 4.15:** comparación de tiempo en el cinturón de Van Allen, tiempo total de transferencia y propelente utilizado entre el caso 3 y el caso 5.

Caso n°	Tiempo en Van Allen [horas]	Tiempo Total [días]	Propelente utilizado [Kg]
3	138,54	119,21	170,10
5	119,08	124,18	177,56
<i>Cambio</i>	-14,04 %	+4,17 %	+4,39 %

Gracias al cambio de la función de costo se logra reducir el tiempo en la zona de peligro del cinturón de Van Allen 19,46 horas respecto del caso base 3. Esto significa una reducción del 14 % del tiempo pasado en el cinturón con un aumento del 4,1 % en el tiempo total de transferencia. En la tabla 4.15 se pueden observar los valores comparativos.



**Figura 4.23:** perigeo y apogeo desde el centro de la tierra en función del tiempo. Entre los 2000 Km y 10000 Km se encuentra la zona del cinturón de Van Allen en la que se desea permanecer el menor tiempo posible.



**Figura 4.24:** representación del plano orbital con las órbitas inicial, final y del día 61. Es en este momento que el satélite abandona finalmente su paso por la zona no deseada del cinturón de Van Allen. En este instante de tiempo  $a = 41838\text{Km}$ ,  $e = 0,60449$ ,  $i = 14,69^\circ$ ,  $\Omega = -16,70^\circ$  y  $\omega = 25,68^\circ$



## 4.9. Caso 6: De Súper GTO ( $200 \times 60000Km$ ) a GEO

### 4.9.1. Misión

En esta ocasión la misión contará con los mismos requerimientos de misión y el mismo tipo de satélite y propulsores pero comenzará de una órbita distinta. La órbita designada como órbita inicial es una súper GTO de 200 Km de altitud de perigeo y 60.000 Km de altitud de apogeo. Notar que esto implica que la velocidad en el perigeo tiene que ser mayor al caso de GTO, y por ende, se espera un tiempo de estadía total en el cinturón de Van Allen menor. En este caso se optimizará el tiempo total de transferencia. La función de costo tiene la misma forma que aquellos casos donde el tiempo fue la magnitud minimizada:

$$\mathcal{J}_6 = t_f \quad (4.9.1)$$

**Tabla 4.16:** Tabla de Misión de caso 6.

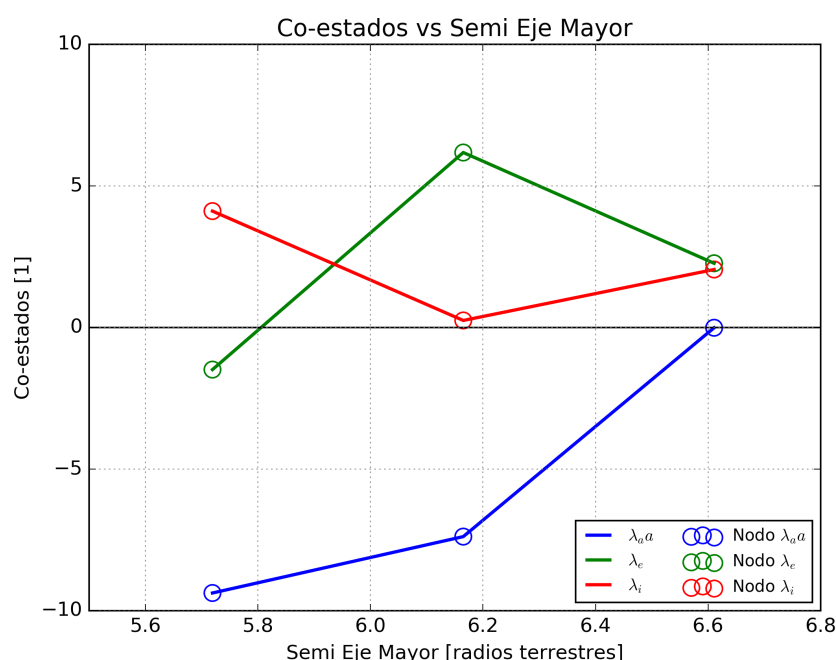
Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	36478	42164	Km
Excentricidad	$e$	0,8197	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	0	—	°
Masa	$m$	1200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	5		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	55		%
Impulso específico	$Isp$	1800		$s$
Fecha de Inicio: 22/03/2000 00:00:00				

### 4.9.2. Optimización y Resultados

En la tabla 4.17 se muestran los resultados finales de la optimización y en la figura 4.25 se muestran los nodos resultantes.

**Tabla 4.17:** resultados relevantes de la optimización del caso 6.

Magnitud		Valor	Unidad
Tiempo de transferencia		$105,80 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado		$154,03 \pm 0,76$	Kg
Tiempo en Cinturón de Van Allen		58,528	Horas
Nodos			
Nodo n°	$\lambda_a$	$\lambda_e$	$\lambda_i$
1	-9.3820	-1.4930	4.1044
2	-7.3907	6.1730	0.2424
3	-0.0151	2.2620	2.0421

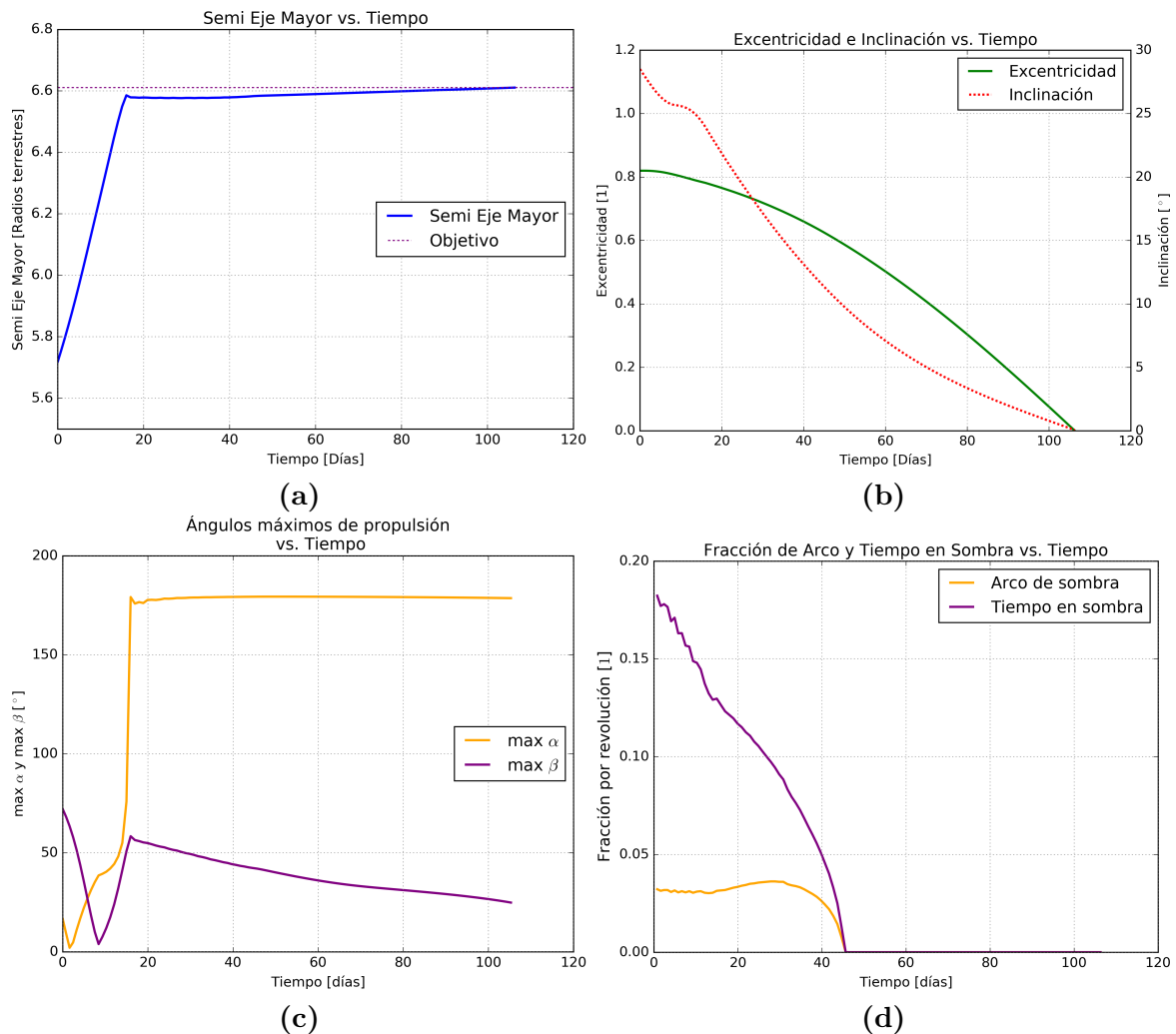
**Figura 4.25:** nodos resultantes de la optimización del caso 6. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semieje mayor.

### 4.9.3. Análisis de Resultados

Como en los casos anteriores, en la figura 4.26, se pueden encontrar las curvas de evolución de la estrategia encontrada como óptima para este caso. Una de las primeras cosas que llama la atención, es el abrupto crecimiento del semi eje mayor: 97,17 % del cambio necesario en el 15,01 % del tiempo total, alrededor del día 16 de la simulación. Tanto los cambios en inclinación como en excentricidad son menores (16 % y 5 % respectivamente) durante el período de crecimiento abrupto del semi eje mayor. Esto, también se hace evidente en los ángulos máximos de propulsión.

La prioridad de la estrategia de subir rápidamente el semi eje mayor, y por ende el perigeo y apogeo, reafirma las indicaciones de que cuanto más alto y más despacio

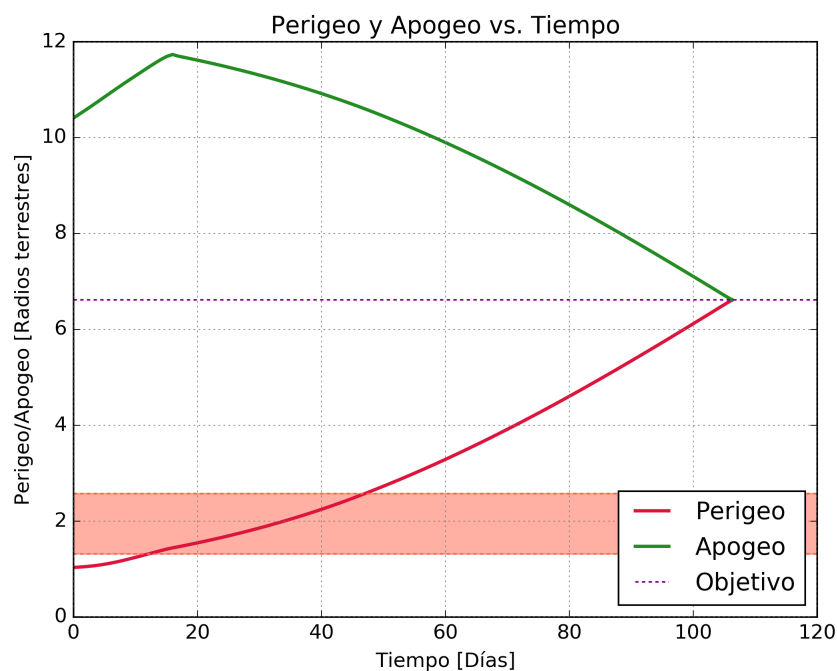
se ejecuten las estrategias estas son más eficientes. En la tabla 4.18 se puede comparar cuanto se gana en tiempo, tiempo en Van Allen y en consumo de propelente en este caso respecto del caso base 3. Además, se comprobó que la velocidad inicial en el perigeo es mayor para el caso 6 que para el caso 3: 10,50 Km/s y 10,25 Km/s.



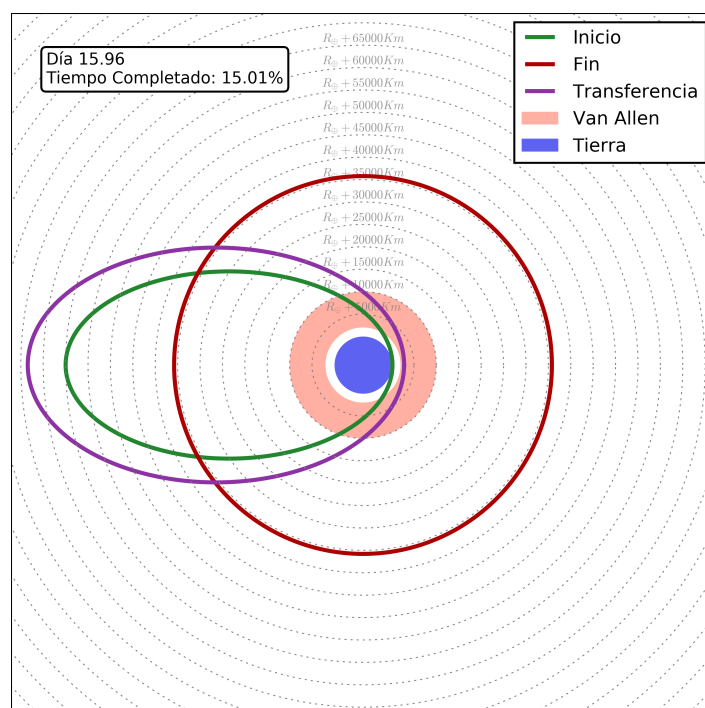
**Figura 4.26:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 6. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).

**Tabla 4.18:** comparación de tiempo en el cinturón de Van Allen, tiempo total de transferencia y propelente utilizado entre el caso 3 y el caso 6.

Caso n°	Tiempo en Van Allen [horas]	Tiempo Total [días]	Propelente utilizado [Kg]
3	138,54	119,21	170,10
6	58,52	105,80	154,03
<i>Cambio</i>	-57,76 %	-11,25 %	-9,45 %



**Figura 4.27:** perigeo y apogeo desde el centro de la tierra en función del tiempo. Se muestra entre los 2.000 Km y los 10.000 Km de altitud el cinturón de Van Allen.



**Figura 4.28:** representación del plano orbital con las órbitas inicial, final y del día 15,96. En esta figura se puede observar la órbita osculante correspondiente al momento donde el semi eje mayor deja de crecer de manera rápida. Luego del rápido crecimiento del semi eje mayor la órbita comienza a circularizarse y desinclinarse. En este instante de tiempo  $a = 42003 Km$ ,  $e = 0,78151$ ,  $i = 23,96^\circ$ ,  $\Omega = -2,03^\circ$  y  $\omega = 4,08^\circ$

## 4.10. Caso 7: De Súper GTO ( $200 \times 90000 \text{ Km}$ ) a GEO

### 4.10.1. Misión

Para la última misión a optimizar y analizar se eligió, como en el caso 6, una súper GTO con 200 Km de altitud de perigeo y 90.000 Km de altitud de apogeo: 30.000 Km más de altitud en apogeo que el caso anterior. Siguiendo las conclusiones del caso anterior, se espera que en este caso las ventajas, respecto del caso 3, se vean aumentadas.

La magnitud a optimizar es el tiempo final de transferencia. La función de costo se define como en casos anteriores:

$$\mathcal{J}_7 = t_f \quad (4.10.1)$$

**Tabla 4.19:** Tabla de Misión de caso 7.

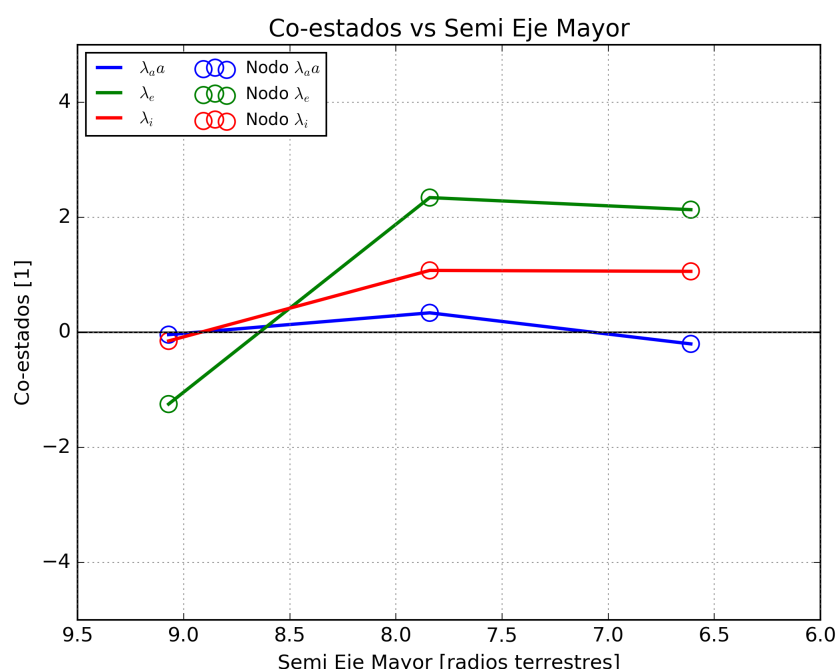
Descripción de la Misión				
Magnitud	Símbolo	Condición Inicial	Requerimiento final	Unidad
Semieje Mayor	$a$	51478	42164	Km
Excentricidad	$e$	0,8722	0	Adim.
Inclinación	$i$	28,5	0	°
Nodo de Ascenso	$\Omega$	0	—	°
Argumento de Perigeo	$\omega$	0	—	°
Masa	$m$	1200	—	Kg
Características del Satélite				
Magnitud	Símbolo	Valor		Unidad
Potencia	$P$	5		$KW$
Eficiencia Eléctrica	$\eta$	55		%
Impulso específico	$Isp$	1800		$s$
Fecha de Inicio: 22/03/2000 00:00:00				

### 4.10.2. Optimización y Resultados

En la tabla 4.20 se muestran los resultados finales de la optimización y en la figura 4.29 se muestran los nodos resultantes. Cabe destacar que en este caso los nodos se ordenan en sentido inverso. El nodo uno corresponde al nodo de semi eje mayor más alto y el tres al más bajo. Esto se debe a que en esta transferencia, a diferencia de las anteriores, es necesario reducir el semi eje mayor y no aumentarlo.

**Tabla 4.20:** resultados relevantes de la optimización del caso 7.

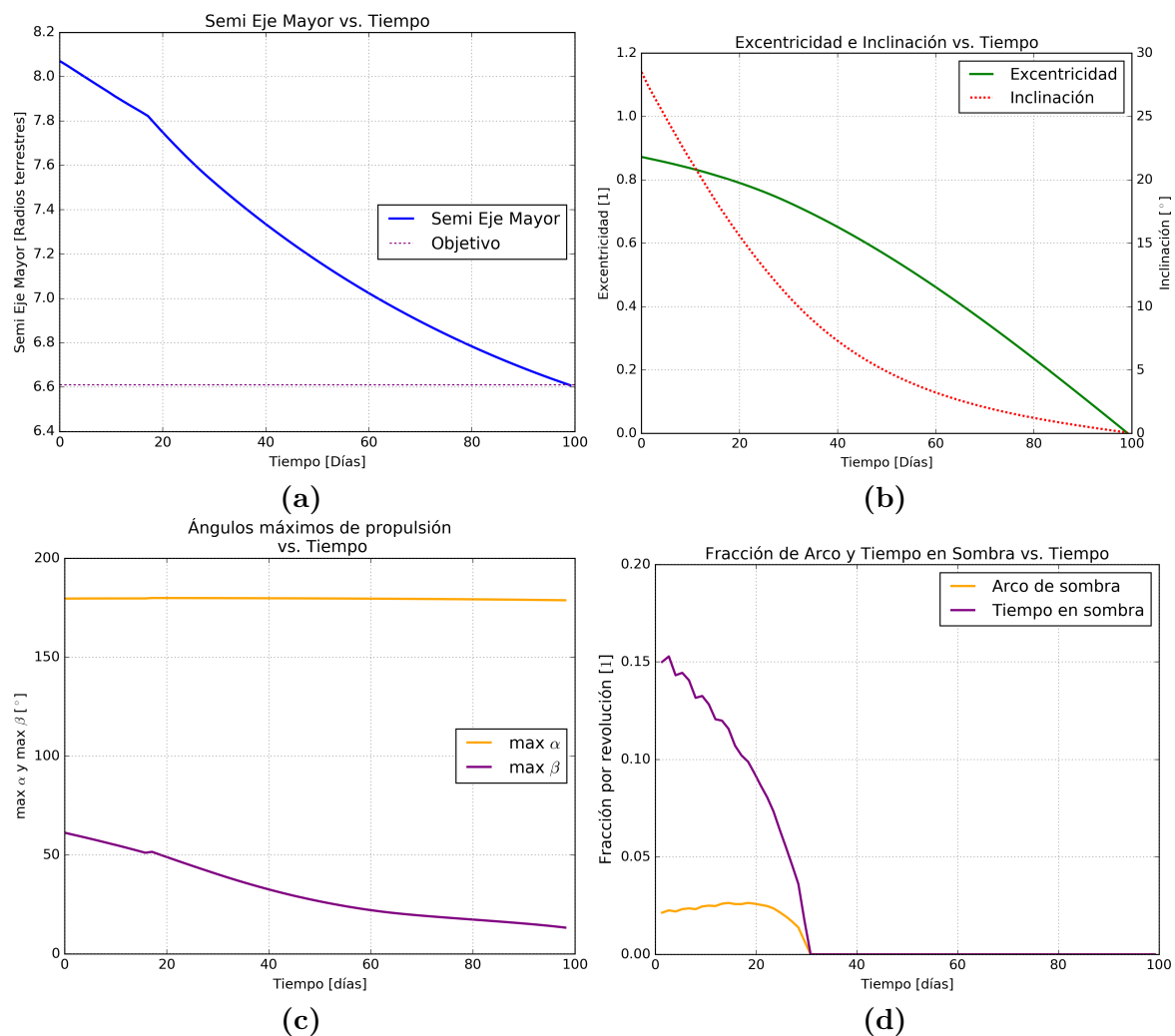
Magnitud		Valor	Unidad
Tiempo de transferencia		$98,59 \pm 0,50$	día
Propelente utilizado		$145,82 \pm 0,76$	Kg
Tiempo en Cinturón de Van Allen		36,96	Horas
Nodos			
Nodo n°	$\lambda_a$	$\lambda_e$	$\lambda_i$
1	-0.0439	-1.2512	-0.1533
2	0.3354	2.3394	1.0731
3	-0.2049	2.1290	1.0565

**Figura 4.29:** nodos resultantes de la optimización del caso 7. Se muestran los valores interpolados a lo largo del semieje mayor. Notar que en este caso el sentido del semi eje mayor se encuentra invertido. Esto se debe a que en este caso fue necesario reducir el semi eje mayor en la transferencia y no aumentarlo, por lo tanto se parametrizó en el sentido contrario.

### 4.10.3. Análisis de Resultados

Este caso presenta varias particularidades respecto de todos los anteriores. Principalmente se destaca que era necesario reducir, no aumentar, el semi eje mayor para cumplir con los requerimientos de la misión. Esta evolución puede observarse claramente en la curva de evolución del semi eje mayor en la figura 4.30. Además, la inclinación se corrige con más velocidad al principio de la transferencia, lo cual es más eficiente que hacerlo hacia el final cuando el apogeo de la órbita es menor (ver figura 4.31). Los

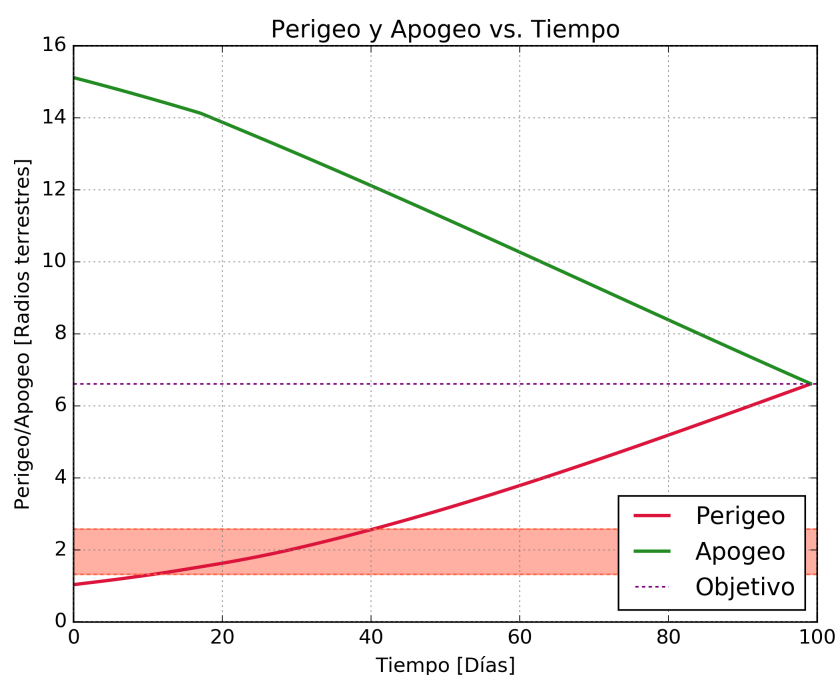
ángulos máximos de propulsión permiten la observación de dos cosas: la primera es que en todo momento fue más prioritario reducir la excentricidad que disminuir el semi eje mayor; esto, puede verse en el valor máximo de  $\alpha$  constante en  $180^\circ$ . La segunda, es el claro ejemplo que se muestra de la relación entre el ángulo máximo de  $\beta$  y la velocidad de reducción de la inclinación: al reducirse el ángulo máximo de  $\beta$  en cada revolución decae la velocidad a la que se reduce la inclinación. Para finalizar, en la tabla 4.21 se pueden observar las mismas ventajas de este tipo de órbita inicial visto en el caso 6, pero aumentadas: el tiempo total pasado en Van Allen es notablemente menor y también se observan modestos ahorros en tiempo de transferencia y masa de propelente utilizado.



**Figura 4.30:** curvas de evolución de la transferencia que se obtiene como optimización del caso 7. En estas curvas se puede observar la evolución del semieje mayor (a), la excentricidad y la inclinación (b), los ángulos máximos de propulsión (c) y la fracción temporal y geométrica en la que el satélite se encuentra en la sombra terrestre(d).

**Tabla 4.21:** comparación de tiempo en el cinturón de Van Allen, tiempo total de transferencia y propelente utilizado entre el caso 3 y el caso 7.

Caso n°	Tiempo en Van Allen [horas]	Tiempo Total [días]	Propelente utilizado [Kg]
3	138,54	119,21	170,10
7	36,96	98,59	145,82
<i>Cambio</i>	-73,32 %	-17,30 %	-14,27 %



**Figura 4.31:** perigeo y apogeo desde el centro de la tierra en función del tiempo. Entre los 2000 Km y 10000 Km de altitud se encuentra la zona del cinturón de Van Allen.

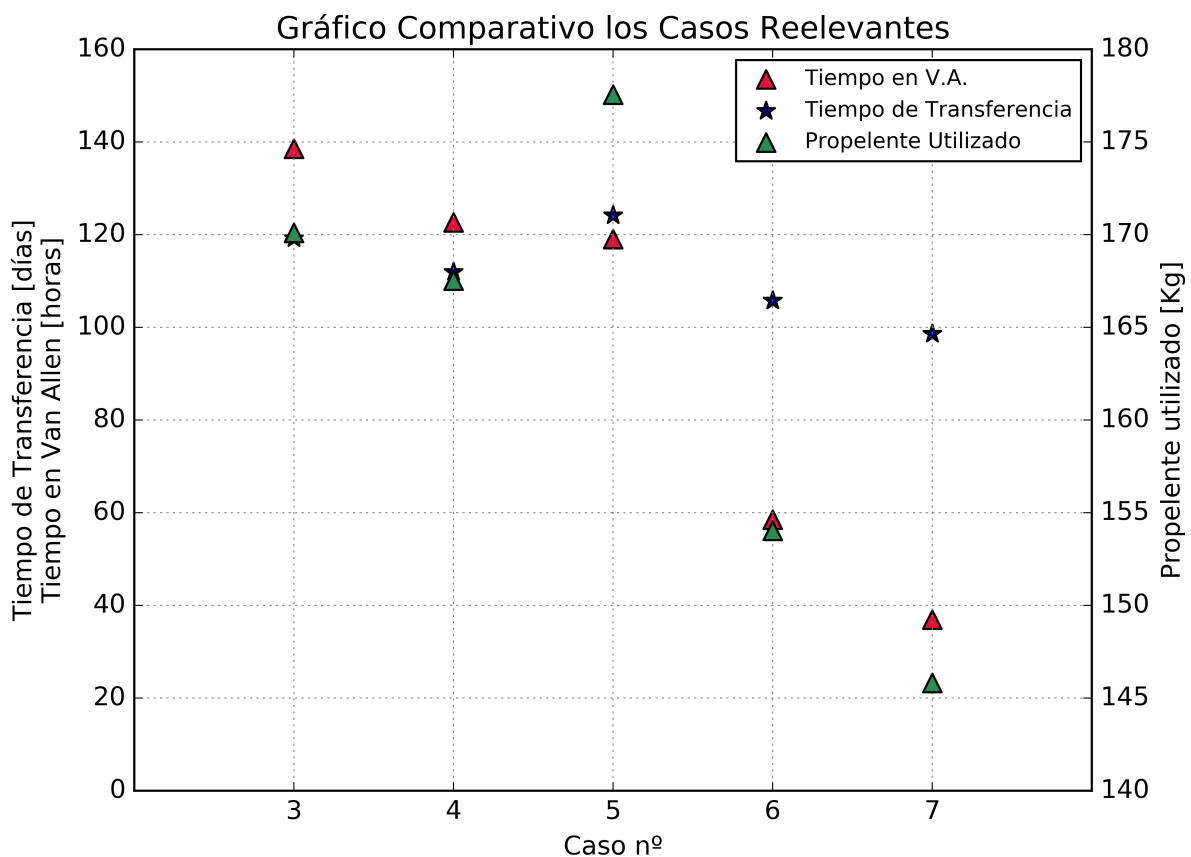
## 4.11. Comparación Final

Es útil realizar una comparación final de manera de poder conocer las ventajas y desventajas de cada caso en particular respecto del resto. Debe señalarse, que en esta comparación se excluyeron los casos 1 y 2 debido a que los mismos, no sólo poseen características en el satélite y propulsores distintas, sino que se realizaron con el único motivo de comprobar la confiabilidad del optimizador. Es por esto, que se presenta la tabla 4.22 donde se pueden observar todos los resultados de los casos comparables de manera resumida. Además se adjunta el gráfico 4.32 donde se puede visualizar la información de la tabla 4.22 en forma gráfica.



**Tabla 4.22:** comparación final entre todos los casos comparables de transferencia a una órbita geoestacionaria. Se excluyeron los casos 1 y 2 debido a que las características del satélite y propulsores son distintas, ya que los mismos fueron utilizados únicamente para validar la confiabilidad de las optimizaciones.

Caso n°	Tiempo en Van Allen [horas]	Tiempo Total [días]	Propelente utilizado [Kg]
3	138,54	119,21	170,10
4	122,66(−11,46 %)	111,97(−6,07 %)	167,53(−1,51 %)
5	119,08(−14,05 %)	124,18(+4,17 %)	177,56(+4,39 %)
6	58,52(−57,76 %)	105,80(−11,25 %)	154,03(−9,45 %)
7	36,96(−76,32 %)	98,59(−17,30 %)	145,82(−14,27 %)



**Figura 4.32:** comparación de los casos del 3 al 7. Esta gráfica permite comparar los valores de la tabla 4.22 de manera visual.

Las distintas técnicas utilizadas para mejorar los resultados no sólo influyen en la función que se desea minimizar, al contrario, influye en todos los parámetros relevantes para este trabajo. Por ejemplo, en el caso 4, al mejorar las condiciones iniciales y acomodar al satélite de manera que tenga luz solar alrededor del apogeo, no sólo se mejoró el tiempo de transferencia; con este, se mejoraron el tiempo en el cinturón de Van Allen y la cantidad de propelente utilizado. Esto indicaría que con tal sólo lanzar al satélite en momentos distintos se logran diferencias notables en los costos de la misión.

Sin embargo, no sólo se puede cambiar las condiciones de lanzamiento sino la función de costo a optimizar. Esto, se puede estudiar en el caso 5 donde la función de costo a minimizar fue el tiempo en el que satélite se hallaba en el cinturón de Van Allen. Esta optimización, dio como resultado que con las mismas condiciones de lanzamiento y satélite, cambiando el plan de propulsión, es posible pasar menos tiempo en la zona peligrosa del cinturón. Eso sí, es necesario pagar como costo más tiempo de transferencia y mayor utilización de propelente.

En los casos finales 6 y 7 se puede observar los beneficios de una órbita de mayor semi eje mayor. Al aumentar el tamaño de semieje inicial se reducen todos los parámetros reelevantes: tiempo de transferencia, tiempo en el cinturón de Van Allen y la cantidad de propelente utilizado. Sin embargo, este tipo de órbitas iniciales suelen estar penalizadas por el lanzador del satélite al cuál le presupone un coste más alto en la colocación del satélite.

Para finalizar, este análisis permite conocer las magnitudes de las mejoras que se pueden realizar en una transferencia satelital considerando el momento de lanzamiento, el tipo de estrategia y la órbita en la que el lanzador nos puede dejar. Todos estos son factores que necesitan decidirse al momento de establecer una misión, es por esto, que este análisis resulta de gran utilidad a la hora de seleccionar un tipo de estrategia, lanzador y momento.

# Capítulo 5

## Trabajo Futuro Sugerido

### 5.1. Software

**Núcleo de Integración** El núcleo de integración tiene mucho espacio para trabajo en el armado de las estrategias. Al presente momento, estas estrategias se compilan en tiempo real para poder ser resueltas por el núcleo de integración. Sin embargo para la compilación en tiempo real, se utiliza un compilador rápido experimental llamado “*Tiny C Compiler*”. Este se eligió debido a la facilidad de integración con el código. Sin embargo, se encontraron problemas en la capacidad del compilador para interpretar números de punto flotante literales. Además, la solución de la compilación en tiempo real no es quizás la mejor de las soluciones para un lenguaje compilado como C++/CUDA. Sería interesante plantear una manera distinta de poder seguir utilizando distintas estrategias de manera versátil, sin necesidad de compilar todo el código del trabajo desde cero. La búsqueda de una herramienta o técnica distinta para solventar el problema de compilación dinámica es fuertemente sugerida.

**PyCusoi** En el desarrollo de las librerías de alto nivel “PyCusoi” se utilizaron sólo aspectos básicos del lenguaje Python. Se sugiere trabajar en la estandarización del código de las librerías de PyCusoi y en el perfeccionamiento de las mismas. Hay mucho espacio para trabajar, también, en el manejo de excepciones en esta librería, de manera de poder hacer más segura su utilización.

### 5.2. Optimización

**Otras técnicas** Se sugiere profundizar el trabajo de optimización con la utilización otras técnicas de optimización. Sería interesante poder comparar si las mismas convergen a los mismos resultados o es posible encontrar transferencias más eficientes.

**Parametrización** Todas las parametrizaciones llevadas a cabo en las optimizaciones fueron relativas a la posición del satélite respecto del semi eje mayor. Sin embargo, se tienen indicios que sería conveniente parametrizar los nodos de las estrategias en función del tiempo o de alguna otra variable. En especial, esto sería útil para optimizar casos como el 5, donde se eleva rápidamente el valor del semi eje mayor y luego la corrección de la excentricidad y la inclinación se realiza con el empleo de la parte final de los nodos.

**Optimización de la Optimización** En el presente estudio no se consideró de vital importancia los tiempos en los que las optimizaciones se llevaron a cabo. Se sugiere realizar un estudio del tiempo que distintas técnicas de optimización tomarían para encontrar la estrategia de transferencia óptima.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Luego de varias validaciones y horas de prueba, se logró desarrollar un código de propagación de órbitas que satisface los requerimientos planteados en el desarrollo del trabajo. Cusoi ejecuta simulaciones de transferencias de órbitas en tiempos lo suficientemente cortos para ser usado de manera repetida. Las ejecuciones de las simulaciones llevadas a cabo por Cusoi nunca tomaron más de un segundo. Normalmente, los casos tomaban alrededor de centenas de milisegundos.

La alta versatilidad del código permitió que este se utilice dentro de otros algoritmos de optimización en tiempos razonables. Desde el comienzo de las validaciones hasta el final de las optimizaciones no fue necesario compilar el código del núcleo de Cusoi. Esto significa que se pudo utilizar como una herramienta autocontenida.

Dentro de las transferencias optimizadas se desarrollaron 7 casos. De estos 7 casos, 5 de ellos se llevaron a cabo de forma tal de poder ser comparados. Siendo el interés de este trabajo encontrar estrategias de transferencia óptimas para satélites geoestacionarios, se analizaron las diferencias, ventajas y desventajas en estos casos. Se encontró que la selección de una estrategia de transferencia depende fuertemente de los requerimientos y restricciones de la misión y de los equipos transportados en el satélite.

Si un satélite transporta equipos altamente delicados a la radiación ionizante, es preferible conseguir un lanzador que nos permite colocar el satélite en una órbita Súper GTO, con el apogeo más alto posible, de manera de realizar la transferencia transitando el menor tiempo posible por la zona peligrosa del cinturón de Van Allen. Si las penalizaciones monetarias por parte del lanzador fueran muy grandes en relación a las necesidades de la misión, se pueden modificar las estrategias de transferencia optimizando los tiempos en el cinturón de Van Allen, lo cuál tiene un costo en tiempo de transferencia y propelente utilizado, o se puede realizar un estudio de en que momento es conveniente realizar el lanzamiento. En el caso 4 de optimización puede observarse como el posicionamiento de la sombra sobre el lado rápido de la órbita, mejora de manera sustancial la transferencia orbital a coste cero. En el caso 5 se evidencia que

sólo con el cambio en el tipo de transferencia, sin requerimientos adicionales al satélite o al lanzador, es posible disminuir los tiempos de estadía en el cinturón de Van Allen.

En otros casos es conveniente estudiar el tiempo total de transferencia como principal factor influyente. En el análisis de los casos optimizados puede observarse que, salvo para el caso 4 que implica un momento de lanzamiento más inteligente, todos los casos que implican ganancias de tiempo respecto del caso base también implican partir de una órbita distinta. Aún así, las mejoras en tiempo de transferencia, menores todas al 18 %, no se consideran significativas frente a las posibles penalizaciones por parte del lanzador. A raíz de esto, se considera que los resultados del caso base son una buena guía para conocer los tiempos óptimos alcanzables por una transferencia. Es decir, conociendo los resultados del caso base para cualquier tipo de satélite, estos pueden darnos un sentido de la magnitud de tiempo requerido para la transferencia a partir de la órbita elegida, sabiendo que este tipo no va a variar más de un 10 % según la posición de lanzamiento.

Como conclusión final se considera satisfactorio el proceso de desarrollo de software de propagación y análisis de transferencias orbitales óptimas.

# Bibliografía

- [1] Srinivasamuthy, N. G. . K. Optimal low thrust orbit transfer from gto to geosynchronous orbit and stationkeeping using electric propulsion system. En: 54th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, the International Academy of Astronautics, and the International Institute of Space Law. [vi](#), [45](#), [49](#), [51](#)
- [2] J.E.Pollard. Simplified Analysis of Low-Thrust Orbital Maneuvers. Inf. téc., The Aerospace Corporation, Technology Operations. [vi](#), [38](#), [46](#), [55](#), [57](#), [59](#)
- [3] Marcel J. Sidi. Spacecraft Dynamics and Control. A Practical Engineering Approach. Cambridge University Press, 1997. [18](#), [26](#)
- [4] Bruce A. Conway. Spacecraft Trajectory Optimization. Cambridge University Press, 2010. [27](#), [34](#), [38](#), [61](#), [66](#), [69](#)
- [5] Vallado, D. Fundamentals of Astrodynamics and Applications, 2nd Edition. Microcosm Press and Kluwer Academic Publishers, 2001. [28](#), [35](#)
- [6] Hahn, J. N. G. Análisis de Factibilidad de Desarrollo de un Propulsor Iónico. Proyecto Fin de Carrera, Instituto Balseiro - UNCUIYO - CNEA. [29](#)

